This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Engin. Library
TA
465
.P74

Untersuchungen
über das Zusammenwirken wagerechter Verbände und eingespannter Stützen im Eisenhochbau

von

Dr.-Ing. Karl Pohl
Konstruktionsingenieur an der Königl. Techn. Hochschule zu Berlin

Mit 47 Figuren im Text

Leipzig und Berlin
Verlag von Wilhelm Engelmann
1914

Digitized by Google

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Einleitung 1

I. Abschnitt.

§ 2. Erläuterung des Systems. Wahl der statisch unbestimmten Größen 1
§ 3. Ableitung der Elastizitätsgleichungen 2
§ 4. Auswertung der Belastungsglieder 10
§ 5. Zahlenbeispiel 15
§ 6. Einfluß von Wärmeänderungen 26

II. Abschnitt.

§ 7. Der Balken auf zwei Stützen mit stetiger elastischer Zwischenstützung 31
§ 8. Konstanten der Teilbelastungszustände I und II 33
§ 9. Konstanten des wirklichen Belastungszustandes 37
§ 10. Zahlenbeispiel 41
§ 11. Schlußbemerkungen 55

Literatur.

Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, II. Band, 2. Abteilung, §§ 6, 13, 15.

Föppl, Festigkeitslehre, 6. Abschnitt.

Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaus, Berlin 1888.

Gensen, Der Einfluß der Windverspannungen auf die Einspannungsmomente der Ständer eiserner Wandfachwerke. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1903.

303223

Digitized by Google

Digitized by Google

§ 1. Einleitung.

Der Querschnitt einer eisernen Halle besteht im einfachsten Falle aus dem Dachbinder und zwei Stützen, die zusammen ein ebenes Tragwerk bilden, das in folgendem als Rahmen bezeichnet werden soll. Sind beide Stützen Pendelsäulen, so ist zur Stabilität des Bauwerks ein durchlaufender Längsverband, ein »Hauptwindverband« erforderlich, der die wagerecht quer zur Halle wirkenden Kräfte aus Winddruck, Bremsen und Schrägziehen der Kranlasten aufnimmt und von mindestens zwei stabilen Rahmen gestützt wird, die meist durch die Giebelwände ersetzt werden. Sind die Zwischenrahmen jedoch stabil oder gar statisch unbestimmt, Abb. 1, so ist der durchlaufende Längsverband zur Standsicherheit des Bauwerks, das ein räumliches Fachwerk darstellt, nicht mehr erforderlich. Die Anordnung eines Hauptwindverbandes kann aber trotzdem recht nützlich sein, da dem Bauwerk hierdurch gegen wagerechte, quer gerichtete Kräfte große Steifigkeit verliehen wird. Es treten jedoch hierbei mindestens so viel statisch unbestimmte Größen auf, als Zwischenrahmen vorhanden sind. Das Ziel der folgenden Untersuchungen soll sein, die Wirkung der erwähnten Kräfte auf die Halle und ihre Verteilung auf Rahmen und Windverband zu berechnen. Dies geschieht im ersten Abschnitt (2—6) durch Aufstellen von Elastizitätsgleichungen für passend gewählte überzählige Größen; im zweiten Abschnitt (7—11) wird versucht, die Aufgabe mit einigen Abänderungen in allgemeinerer Form zu lösen.

I. Abschnitt.

§ 2. Erläuterung des Systems. Wahl der statisch unbestimmten Größen.

Gegeben sei ein Hallenbauwerk nach Abb. 1. Die Giebelwände sollen gegen Kräfte in ihrer Ebene starr, lotrecht zu ihrer Ebene jedoch nachgiebig sein, so daß sie nur Auflagerkräfte senkrecht zur Hallenachse ausüben können. Der Hauptwindverband ist also an den Enden als einfacher Balken gestützt. Es seien n gleiche Felder vorhanden, sämtliche Stützen seien gleich ausgebildet, alle Lasten wirken senkrecht zu den Längswänden. Jede Zwischenstütze übt eine wagerechte Kraft W auf den Windverband aus, stellt also eine überzählige Größe dar. Um auf Elastizitätsgleichungen Clapeyronscher Form zu kommen, denke man sich $n-1$ Gurtstäbe

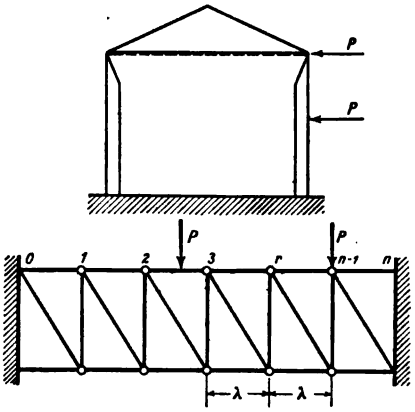

Abb. 1.

Digitized by Google

auf einer Seite der Halle durchschnitten, wodurch die Wirkung des Verbandes aufgehoben ist, und die Spannkräfte in den durchschnittenen Stäben als Unbekannte $X_1 X_2 \dots X_{n-1}$ eingeführt. Es bleiben dann als Hauptsystem $n-1$ Stützenpaare übrig zur Aufnahme der äußeren Kräfte, die mit den Dachbindern ebensoviel je einfach unbestimmte Rahmen bilden.

Die Aufgabe ist gelöst, sobald der Einfluß einer an beliebiger Stelle der Halle angreifenden Last P auf jede Unbekannte X angegeben werden kann.

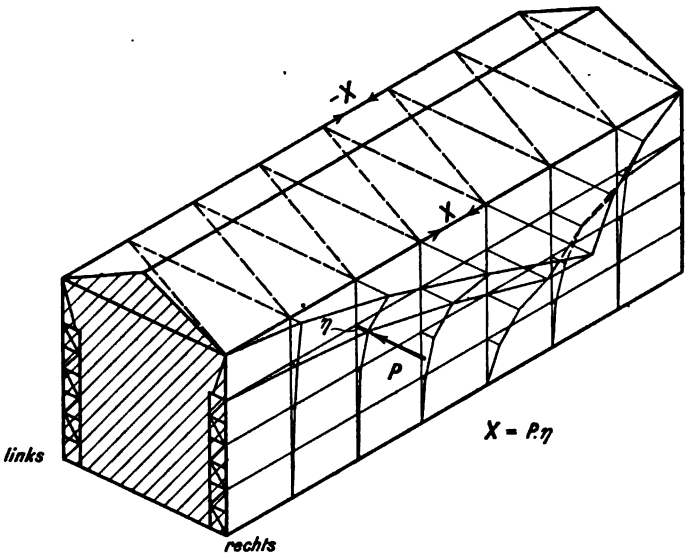

Abb. 2.

Denkt man sich diese Einflußordinaten η an jeder Stelle senkrecht zur Längswand aufgetragen, so bilden ihre Endpunkte eine Fläche, die mit der Längswand einen »Einflußkörper« einschließt. Wagerechte und senkrechte Schnitte durch diesen Körper stellen Einflußflächen dar, die von Einflußlinien begrenzt werden. Durch die wagerechte Begrenzungsfläche in Höhe des Windverbandes sind alle Ordinaten einer Unbekannten X bestimmt, da sie in den lotrechten Ebenen überall demselben einfachen Gesetze folgen.

§ 3. Ableitung der Elastizitätsgleichungen.

Sind alle $X = 0$, so werden die äußeren Kräfte allein von den Rahmen aufgenommen. Für die Spannkräfte in den Gurt- und Diagonalstäben gilt also $S_0 = 0$.

Es soll hierbei vorausgesetzt werden, daß Lasten zwischen den Rahmen durch die Längsriegel als einfache Balken übertragen werden. In den Binderuntergurten entsteht V_0, das durch eine Elastizitätsgleichung leicht gefunden werden kann. Wirkt P am oberen Stützenende, so ist

$$V_0 = -\frac{P}{2}\mu, \tag{1}$$

wo μ von der Konstruktion des Hallenquerschnitts abhängt (Abb. 3).

Digitized by Google

Das Bauwerk sei nun unbelastet, ferner seien alle $X = 0$ mit Ausnahme von X_r, das $= -1$ gesetzt werden soll. Hierbei werden außer dem X-Stab noch die Stäbe

$$L_{r+1},\ D_r,\ D_{r+1},\ V_{r-1},\ V_r,\ V_{r+1}$$

gespannt, ferner die drei Stützenpaare $r-1$, r, $r+1$. Die Widerstände W der Stützen denke man in zwischengeschalteten Stäben wirkend.

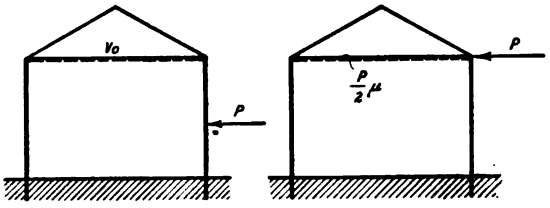

Abb. 3.

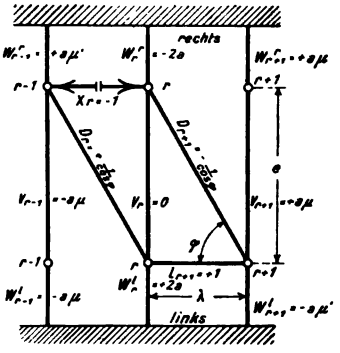

Abb. 4.

Für die Stabkräfte findet man

$$L_{r+1} = +1, \qquad D_r = +\frac{1}{\cos\varphi}, \qquad D_{r+1} = -\frac{1}{\cos\varphi}, \tag{2}$$

wo φ den Neigungswinkel der Diagonalen bedeutet, bezogen auf die Hallenachse. Zur Berechnung der Spannkräfte V und W bringen wir an den Endpunkten der Diagonalen deren in die Binderebene fallende Komponente

$$\operatorname{tg}\varphi = 2a \tag{3}$$

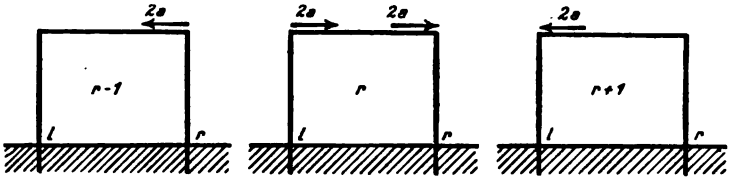

Abb. 5.

als Lasten an, Abb. 5. Setzt man zur Abkürzung

$$2 - \mu = \mu', \tag{4}$$

so ergibt sich

für Rahmen	$r-1$	r	$r+1$
	$V_{(r-1)r} = -a\mu$	$V_{rr} = 0$	$V_{(r+1)r} = +a\mu$
(5)	$W^l_{(r-1)r} = -a\mu$	$W^l_{rr} = +2a$	$W^l_{(r+1)r} = -a\mu'$
	$W^r_{(r-1)r} = +a\mu'$	$W^r_{rr} = -2a$	$W^r_{(r+1)r} = +a\mu$.

Hierbei ist wie in Abb. 4 zwischen einer rechten und einer linken Hallenseite unterschieden worden, worauf sich die oben stehenden Zeiger l und r beziehen. Es bedeutet also z. B. $W^l_{(r+1)r}$ den Widerstand der linken Stütze des Rahmens $r+1$ während des Zustandes $X_r = -1$.

Digitized by Google

Durch die Spannkräfte W sind nun auch die Momente M in den Stützenquerschnitten und die Einspannungsmomente $\mathfrak{M}$ für Zustand $X_r = -1$ bekannt, Abb. 6[1]).

Für die wirklichen im Bauwerk auftretenden Stabkräfte gilt

$$S_m = S_{m0} - S_{m1} X_1 - S_{m2} X_2 - \cdots - S_{mr} X_r - \cdots - S_{m(n-1)} X_{n-1}; \tag{6}$$

ähnliche Ausdrücke gelten für die Momente M. Aus Zustand $X_r = -1$, der sich nur über zwei Felder und drei Rahmen erstreckt, geht hervor, daß in jedem dieser

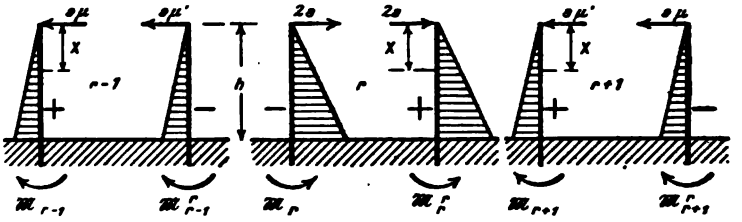

Abb. 6.

Ausdrücke höchstens drei aufeinanderfolgende X vorkommen, und daß man aus diesem einen Zustand die Gleichungen (6) für die S und M ohne weiteres folgern kann. Man erhält:

$$\left\{\begin{array}{ll} L_{r+1} = -X_r & V_{r-1} = V_{(r-1)0} - a\mu(X_{r-2} - X_r) \\ D_r = \dfrac{1}{\cos\varphi}(-X_r + X_{r-1}) & V_r = V_{r0} - a\mu(X_{r-1} - X_{r+1}) \\ D_{r+1} = \dfrac{1}{\cos\varphi}(-X_{r+1} + X_r) & V_{r+1} = V_{(r+1)0} - a\mu(X_r - X_{r+2}) \end{array}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} W_r^l = V_{r0} - X_{r-1}(-a\mu') - X_r(+2a) - X_{r+1}(-a\mu) \\ W_r^r = V_{r0} - X_{r-1}(+a\mu) - X_r(-2a) - X_{r+1}(+a\mu'), \end{array}\right. \tag{8}$$

ähnlich sind W_{r-1} und W_{r+1} gebildet.

Für die Momente in den Stützen gilt (vgl. Abb. 6):

$$\left\{\begin{array}{l} M_r^l = M_{r0}^l - X_{r-1}(+a\mu' x) - X_r(-2ax) - X_{r+1}(+a\mu x) \\ M_r^r = M_{r0}^r - X_{r-1}(-a\mu x) - X_r(+2ax) - X_{r+1}(-a\mu' x). \end{array}\right. \tag{9}$$

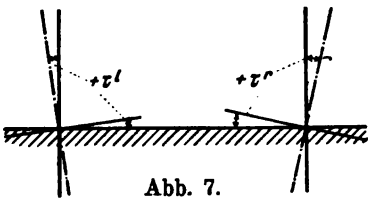

Abb. 7.

Hierin ist x von oben gerechnet. Für die Momente in den Stützen der Rahmen $r-1$ und $r+1$ ergeben sich ähnliche Ausdrücke.

Es wird nun auf das Tragwerk die Arbeitsgleichung

$$\Sigma \bar{Q} c = \Sigma \bar{S} \Delta s + \int \bar{M} d\varphi \tag{10}$$

angewendet, wobei sich die Auflagerkräfte $\bar{Q}$, Stabkräfte $\bar{S}$ und Biegungsmomente $\bar{M}$ auf Zustand $X_r = -1$ beziehen, die Bewegungen Δc der Auflager, Längenänderungen Δs der Stäbe und Drehungen $d\varphi$ der Stützenquerschnitte jedoch auf den wirklichen Verschiebungszustand unter der Belastung. Normalkräfte $\bar{N}$ entstehen nicht, die Querkräfte sollen in ihrer Wirkung auf die Formänderungen vernachlässigt werden. Zur Berechnung der virtuellen Arbeiten $\Sigma \bar{Q} c$ werde angenommen, daß die Verschiebungen der Fundamente vernachlässigt werden können, hingegen soll versucht werden, die Nachgiebigkeit der Einspannung zu berücksichtigen.

[1]) In Abb. 6 fehlen bei den Einspannungsmomenten $\mathfrak{M}$ der linksseitigen Stützen die Zeiger l.

Digitized by Google

Wir nennen die Drehungen der Einspannungsquerschnitte τ^l und τ^r und nehmen sie positiv an, wenn sie nach außen erfolgen, die Stützenenden also positiven Einspannungsmomenten nachgeben (Abb. 7). Bei dieser Annahme verrichten die negativen, am System angreifenden Auflagerkräfte positive Arbeiten.

Mit Rücksicht auf Abb. 6 ergibt sich

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma \bar{Q}c = &- a\mu h\tau^l_{r-1} + a\mu' h\tau^r_{r-1} \\ &+ 2ah\tau^l_r \quad - 2ah\tau^r_r \\ &- a\mu' h\tau^l_{r+1} + a\mu h\tau^r_{r+1}\,. \end{aligned}\right.$$

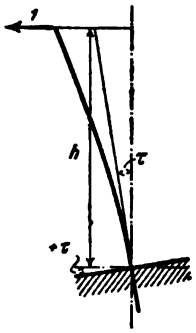

Abb. 8.

Bezeichnet man die Drehung des Einspannungsquerschnitts für $W = -1$ mit τ (Abb. 8), so folgt aus Abb. 6 für Zustand $X_r = -1$:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \tau^l_{(r-1)r} &= +a\mu\tau\,, & \tau^r_{(r-1)r} &= -a\mu'\tau\,, \\ \tau^l_{rr} &= -2a\tau\,, & \tau^r_{rr} &= +2a\tau\,, \\ \tau^l_{(r+1)r} &= +a\mu'\tau\,, & \tau^r_{(r+1)r} &= -a\mu\tau\,, \end{aligned}\right.$$

woraus wir für die wirklichen Drehungen τ^l und τ^r in der Gleichung (11) schreiben können:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \tau^l_r &= \tau^l_{r0} - X_{r-1}(+a\mu'\tau) - X_r(-2a\tau) - X_{r+1}(+a\mu\tau) \\ \tau^r_r &= \tau^r_{r0} - X_{r-1}(-a\mu\tau) - X_r(+2a\tau) - X_{r+1}(-a\mu'\tau)\,, \end{aligned}\right.$$

für τ_{r-1} und τ_{r+1} ergeben sich entsprechende Ausdrücke. Es sei

λ die Feldweite, d die Länge der Diagonalen, e der Vertikalen des Windverbandes, F^w = Gurtquerschnitt, F^d = Querschnitt der Diagonalen, F^v der Vertikalen (Binderuntergurte).

Man erhält dann für die r^{te} Elastizitätsgleichung:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &- a\mu h\,(\tau^l_{(r-1)0} - X_{r-2}a\mu'\tau + X_{r-1}2a\tau - X_r a\mu\tau) \\ &+ a\mu' h(\tau^r_{(r-1)0} + X_{r-2}a\mu\tau - X_{r-1}2a\tau + X_r a\mu'\tau) \\ &+ 2ah\,(\tau^l_{r0} \quad - X_{r-1}a\mu'\tau + X_r 2a\tau \quad - X_{r+1}a\mu\tau) \\ &- 2ah\,(\tau^r_{r0} \quad + X_{r-1}a\mu\tau - X_r 2a\tau \quad + X_{r+1}a\mu'\tau) \\ &- a\mu' h(\tau^l_{(r+1)0} - X_r a\mu'\tau \quad + X_{r+1}2a\tau - X_{r+2}a\mu\tau) \\ &+ a\mu h\,(\tau^r_{(r+1)0} + X_r a\mu\tau \quad - X_{r+1}2a\tau + X_{r+2}a\mu'\tau) = \\ &- 1(+X_r)\frac{\lambda}{EF^w} + 1(-X_r)\frac{\lambda}{EF^w} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{(-X_r + X_{r-1})}{\cos\varphi}\frac{d}{EF^d} \\ &- \frac{1}{\cos\varphi}\frac{(+X_r - X_{r+1})}{\cos\varphi}\frac{d}{EF^d} - a\mu(V_{(r-1)0} - a\mu X_{r-2} + a\mu X_r)\frac{e}{EF^v} \\ &+ a\mu(V_{(r+1)0} - a\mu X_r + a\mu X_{r+2})\frac{e}{EF^v} \\ &+ \int_0^h (+a\mu x)\,(M^l_{(r-1)0} - X_{r-2}a\mu' x + X_{r-1}2ax - X_r a\mu x)\frac{dx}{EJ} \\ &+ \int_0^h (-a\mu' x)(M^r_{(r-1)0} + X_{r-2}a\mu x - X_{r-1}2ax + X_r a\mu' x)\frac{dx}{EJ} \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

$$
\left|\begin{array}{l}
+\int_0^h(-2ax)\,(M^l_{r0} - X_{r-1}a\mu' x + X_r 2ax - X_{r+1}a\mu x)\,\frac{dx}{EJ}\\
+\int_0^h(+2ax)\,(M^r_{r0} + X_{r-1}a\mu x - X_r 2ax + X_{r+1}a\mu' x)\,\frac{dx}{EJ}\\
+\int_0^h(+a\mu' x)(M^l_{(r+1)0} - X_r a\mu' x + X_{r+1}2ax - X_{r+2}a\mu x)\,\frac{dx}{EJ}\\
+\int_0^h(-a\mu x)\,(M^r_{(r+1)0} + X_r a\mu x - X_{r+1}2ax + X_{r+2}a\mu' x)\,\frac{dx}{EJ}.
\end{array}\right.
$$

Das Integral $\int\frac{x^2dx}{EJ}$ stellt die wagerechte Verschiebung des oberen Stützenendes dar unter der Last 1. Da das Trägheitsmoment J der Stützen nur im unteren Teile konstant zu sein pflegt, so führen wir ein Trägheitsmoment

(15) $$J' = J\nu$$

ein, das sich aus der Bedingung leicht berechnen läßt, daß für J' konstant dieselbe Ausbiegung am Stützenende eintritt wie bei der wirklichen Stütze. Es ist dann

(16) $$\int_0^h\frac{x^2dx}{EJ} = \frac{h^3}{3EJ'}.$$

Wir multiplizieren mit EJ' und setzen

(17) $$\frac{J'}{F^w} = k^w, \qquad \frac{J'}{F^d} = k^d, \qquad \frac{J'}{F^v} = k^v.$$

Dann ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
X_{r-2}EJ'2a^2\mu\mu' h\tau + X_{r-1}EJ'2a^2h\tau(-2\mu - 2\mu')\\
+ X_r EJ'a^2h\tau(2\mu^2 + 2\mu'^2 + 8) + X_{r+1}EJ'2a^2h\tau(-2\mu - 2\mu')\\
+ X_{r+2}EJ'2a^2\mu\mu' h\tau\\
+ ah[-\mu\tau^l_{(r-1)0} + \mu'\tau^r_{(r-1)0} - \mu'\tau^l_{(r+1)0} + \mu\tau^r_{(r+1)0}] + 2ah(\tau^l_{r0} - \tau^r_{r0}) =\\
X_{r-2}\left(a^2\mu^2 ek^v - 2a^2\mu\mu'\frac{h^3}{3}\right) + X_{r-1}\left(\frac{dk^d}{\cos^2\varphi} + \frac{8a^2h^3}{3}\right)\\
+ X_r\left(-2\lambda k^w - 2\frac{dk^d}{\cos^2\varphi} - a^2\mu^2 2ek^v - \frac{4}{3}a^2h^3(\mu^2 - 2\mu + 4)\right)\\
+ X_{r+1}\left(\frac{dk^d}{\cos^2\varphi} + \frac{8a^2h^3}{3}\right) + X_{r+2}\left(a^2\mu^2 ek^v - \frac{2a^2h^3}{3}\mu\mu'\right)\\
+ a\mu ek^v(-V_{(r-1)0} + V_{(r+1)0})\\
+ aJ'\left(\mu\int M^l_{(r-1)0}\frac{x\,dx}{J} - \mu'\int M^r_{(r-1)0}\frac{x\,dx}{J} - 2\int M^l_{r0}\frac{x\,dx}{J}\right.\\
\qquad\left. + 2\int M^r_{r0}\frac{x\,dx}{J} + \mu'\int M^l_{(r+1)0}\frac{x\,dx}{J} - \mu\int M^r_{(r+1)0}\frac{x\,dx}{J}\right).
\end{array}
$$

Die Zahl μ (vgl. Gl. 1) liegt stets so nahe bei 1, daß genügend genau

$$\mu\mu' = 1, \qquad \mu^2 - 2\mu + 4 = 3$$

gesetzt werden kann. Führt man ferner ein:

(18) $$\frac{2}{3}a^2h^3 = \alpha;\quad \lambda k^w = \gamma;\quad \frac{dk^d}{\cos^2\varphi} = \delta;\quad a^2ek^v\mu^2 = \varepsilon;\quad EJ'2a^2h\tau = \vartheta,$$

Digitized by Google

so erhält man für die r^{te} Elastizitätsgleichung:

$$(19)\quad \begin{aligned} &- X_{r-2}(\alpha+\vartheta-\varepsilon)+X_{r-1}(4\alpha+4\vartheta+\delta)-X_r(6\alpha+6\vartheta+2[\gamma+\delta+\varepsilon])\\ &+X_{r+1}(4\alpha+4\vartheta+\delta)-X_{r+2}(\alpha+\vartheta-\varepsilon)=N_r, \end{aligned}$$

worin

$$(20)\quad \begin{aligned} N_r = &+EJ'ah[-\mu\tau^l_{(r-1)0}+\mu'\tau^r_{(r-1)0}-\mu'\tau^l_{(r+1)0}+\mu\tau^r_{(r+1)0}\\ &+2(\tau^l_{r0}-\tau^r_{r0})]+a\mu ek^v(V_{(r-1)0}-V_{(r+1)0})\\ &-aJ'\Big[\mu\int M^l_{(r-1)0}\frac{x\,dx}{J}-\mu'\int M^r_{(r-1)0}\frac{x\,dx}{J}-2\int M^l_{r0}\frac{x\,dx}{J}\\ &+2\int M^r_{r0}\frac{x\,dx}{J}+\mu'\int M^l_{(r+1)0}\frac{x\,dx}{J}-\mu\int M^r_{(r+1)0}\frac{x\,dx}{J}\Big]. \end{aligned}$$

Diese Normalgleichung gilt für beliebige Belastung, und zwar für $r=3,4\ldots$ bis $r=(n-3)$. Die vier Endgleichungen weichen etwas hiervon ab.

Die zweite Gleichung lautet:

$$(21)\quad \begin{aligned} &+X_1(4\alpha+4\vartheta+\delta)-X_2(6\alpha+6\vartheta+2[\gamma+\delta+\varepsilon])+X_3(4\alpha+4\vartheta+\delta)\\ &-X_4(\alpha+\vartheta-\varepsilon)=N_2. \end{aligned}$$

Das Belastungsglied ist normal. Die erste Gleichung lautet:

$$(22)\quad \begin{cases} -X_1(5\alpha+5\vartheta+2\gamma+2\delta+\varepsilon)+X_2(4\alpha+4\vartheta+\delta)-X_3(\alpha+\vartheta-\varepsilon)=N_1,\\ \text{wo}\\ N_1=EJ'ah[2(\tau^l_{10}-\tau^r_{10})-\mu'\tau^l_{20}+\mu\tau^r_{20}]-a\mu ek^vV_{20}\\ \qquad -aJ'\Big[-2\int M^l_{10}\frac{x\,dx}{J}+2\int M^r_{10}\frac{x\,dx}{J}+\mu'\int M^l_{20}\frac{x\,dx}{J}-\mu\int M^r_{20}\frac{x\,dx}{J}\Big]. \end{cases}$$

Bei den beiden letzten Gleichungen ist 1 durch $(n-1)$ und 2 durch $(n-2)$ zu ersetzen.

Um sich das Ergebnis besser veranschaulichen zu können, ist in Abb. 10 für den Zustand $X_r=-1$ ein Verschiebungsplan der Knotenpunkte des Windverbandes gezeichnet worden. Geht man von der Gleichung aus:

$$(23)\quad \delta_r=\Sigma P_m\delta_{rm}-X_1\delta_{r1}-X_2\delta_{r2}-\cdots-X_r\delta_{rr}-\cdots,$$

so drückt diese aus, daß unter der Wirkung der Lasten P und der als äußere Kräfte gedachten, an den Schnittflächen der überzähligen Stäbe angreifenden statisch unbestimmten Größen X die gegenseitige Verschiebung der Angriffspunkte von X_r gleich der wirklichen Verschiebung δ_r dieser Punkte sein muß, nachdem Gleichgewicht eingetreten ist. Wärmeänderungen sollen hierbei zunächst außer acht gelassen werden, und zufällige, nicht elastische Bewegungen der Widerlager ausgeschlossen sein. Bei unserer Annahme der statisch unbestimmten Größen sind alle $\delta_r=0$.

Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen erlaubt, Gleichung (23) zu schreiben:

$$(24)\quad 0=\Sigma P_m\delta_{mr}-X_1\delta_{1r}-X_2\delta_{2r}-\cdots-X_r\delta_{rr}-\cdots,$$

worauf sämtliche δ demselben Verschiebungsplan entnommen werden können.

Die Verschiebung des Stützenendes unter der Wirkung einer Kraft 1 ist:

$$(25)\quad \frac{h^3}{3EJ'}+h\tau=\frac{h^3}{3EJ'}v,\quad \text{worin}$$
$$v=1+\frac{3EJ'\tau}{h^2}.$$

Digitized by Google

Die Rahmen werden vorübergehend mit $abc\ldots$ bezeichnet, wobei $a_1 a_4$, $b_1 b_4 \ldots$ die festen Endpunkte der die Stützen vertretenden Auflagerstäbe W, $a_2 a_3$, $b_2 b_3 \ldots$ die Knotenpunkte des Windverbandes sind. Die beim Zustande $X_r = -1$ gespannten Stäbe werden mit 1 bis 12 beziffert.

Bedeutet 0 den Pol des Verschiebungsplanes, so fallen alle Punkte mit den Zeigern 1 und 4 mit 0 zusammen. Da auch noch eine Stabrichtung nach der Formänderung bekannt sein muß, so nehmen wir an, daß r_3 sich nur senkrecht zur Hallenachse verschieben kann.

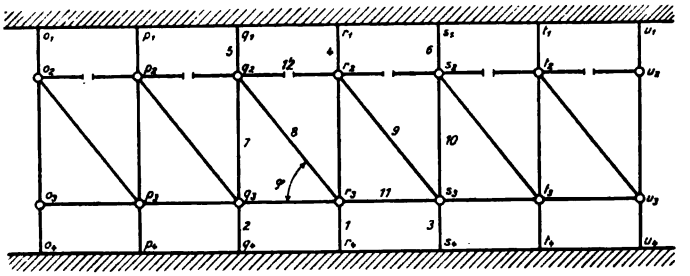

Abb. 9.

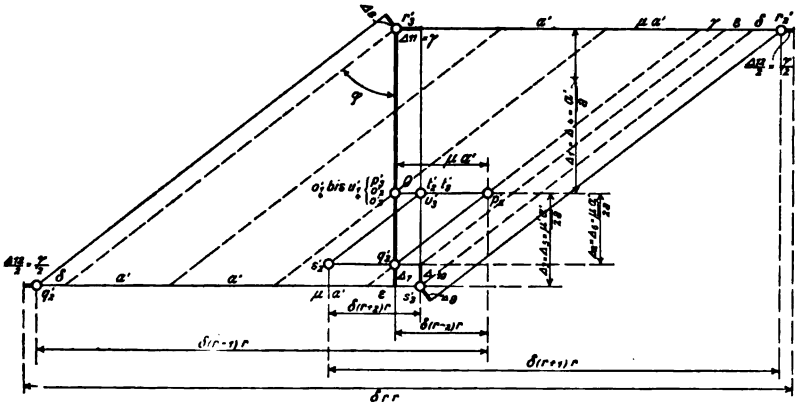

Abb. 10.

$EJ'\Delta_1 = 2\dfrac{ah^3}{3}v$ liefert Punkt r'_3. Da Stab $\overline{q_3 - r_3}$ spannungslos ist, so verschiebt sich q_3 nur in Richtung von 2, und zwar um

$EJ'\Delta_2 = -\mu\dfrac{ah^3}{3}v$ bis q'_3.

$EJ'\Delta_{11} = +\dfrac{EJ'\cdot 1\cdot\lambda}{EF^{10}} = +\lambda k^{10}$ und $EJ'\Delta_3 = -\mu'\dfrac{ah^3}{3}v$ liefern s'_3.

$EJ'\Delta_7 = -a\mu e k^v$ und $EJ'\Delta_8 = +\dfrac{dk^d}{\cos\varphi}$ liefern q'_2, ebenso erhält man $r'_2 s'_2$.

Zieht man durch die Mitte von $\overline{0 - r'_3}$, ferner durch 0, q'_3, sowie durch die Endpunkte der Längenänderung Δ_{10} Senkrechte zu der Richtung der Diagonalen bis zum Schnitt mit den Wagerechten $r'_3 - r'_2$ einerseits und $s'_3 - q'_2$ andererseits, so

Digitized by Google

schneiden diese Lote auf den Wagerechten Strecken ab, die wir mit Beachtung von $\operatorname{tg}\varphi = 2a$ leicht als

$$\alpha' = \alpha + \vartheta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

erkennen. Es ist nämlich

(26) $\alpha' = \alpha + \vartheta$ nach Seite 6, Gl. (18) $= \frac{2}{3} a^2 h^3 \left(1 + \frac{3 E J' \tau}{h^2}\right) = \alpha v.$

Die EJ'-fache Längenänderung eines W-Stabes für $W = 1$ ist

$$= \frac{h^3}{3} v = \frac{\alpha'}{2a^2},$$

also

$$\Delta_5 = + \frac{\mu' \alpha'}{2a}; \quad \Delta_2 = - \frac{\mu \alpha'}{2a}.$$

$\Delta_7 = a \mu e k^2 = \frac{\varepsilon}{a}$, wenn man den geringen Unterschied zwischen μ und μ^2 vernachlässigt. Aus der Bedingung:

$$\Delta_5 - \Delta_2 = \Delta_7 \quad \text{folgt} \quad \alpha' - \mu \alpha' = \varepsilon.$$

Nun ist $\delta_{(r-2)r}$ = Verschiebung der Schnittflächen des Stabes $\overline{o_2 - p_2} = 2a \cdot \frac{\mu \alpha'}{2a}$ $= \mu \alpha' = \alpha' - \varepsilon$.

Der Koeffizient von X_{r-2} der Normalgleichung (19) ist gleichfalls $\alpha' - \varepsilon$. Ebenso ergibt sich:

$$\delta_{(r-1)r} = \overline{p_2' - q_2'} = \delta + 2\alpha' + \mu \alpha' + 2a \cdot \Delta_7 + \mu \alpha'$$
$$= 2\alpha' + \delta + 2(\mu \alpha' + \varepsilon) = 4\alpha' + \delta, \quad \text{vgl. Gl. (19).}$$

Endlich ist

$$\delta_{rr} = \overline{q_2' - r_2'} + 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + \delta + 2\alpha' + \mu \alpha' + 2a \Delta_7 + 2\alpha' + \mu \alpha' + \gamma + 2a \Delta_{10}$$
$$+ \delta + \frac{\gamma}{2} = 2\gamma + 2\delta + 4\alpha' + 2(\mu \alpha' + 2a \Delta_7),$$

da Δ_7 absolut $= \Delta_{10}$. Es ist also in Übereinstimmung mit Gl. (19):

$\delta_{rr} = 6\alpha' + 2(\gamma + \delta + \varepsilon)$, da $\mu \alpha' + 2\varepsilon = \alpha' + \varepsilon$ ist.

Die Verschiebungen δ_{mr} der Lastangriffspunkte können dem Verschiebunsplan nur insoweit entnommen werden, als die Lasten am Windverband selbst angreifen. Für tiefer gelegene Punkte muß der Aufriß der Rahmen und ihre Formänderung zu Hilfe genommen werden, die durch die Längenänderung der W-Stäbe jedoch schon bestimmt ist. Abb. 11 zeigt δ_{mr}.

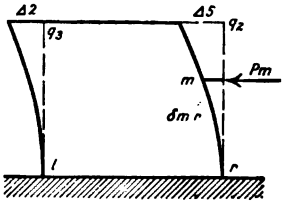

Abb. 11.

Die durch die Gleichungen 19—22 dargestellten Elastizitätsgleichungen für die Unbekannten X bilden ein System der Clapeyronschen Art, dem ähnlich, das man für den durchlaufenden Balken auf elastischen Stützen erhält. In den $n - 5$ mittleren Gleichungen kommen je fünf, in der zweiten und vorletzten je vier, in der ersten und letzten je drei Unbekannte vor. Es läßt sich nun dies System nach dem Eliminationsverfahren so auflösen, daß für jede Unbekannte ein Ausdruck gewonnen wird:

(27) $X_i = \beta_{i1} N_1 + \beta_{i2} N_2 + \cdots \beta_{i(r-1)} N_{r-1} + \beta_{ir} N_r + \cdots + \beta_{i(n-1)} N_{n-1}$ [1].

[1] Vgl. Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen II, 2. S. 70.

Digitized by Google

§ 4. Auswertung der Belastungsglieder.

Um die bisherigen Ergebnisse auf ein Zahlenbeispiel anwenden zu können, müssen die verwendeten Koeffizienten näher bestimmt und die Belastungsglieder N umgeformt werden. Es liege der häufig vorkommende Fall vor, daß auf der Strecke h^u der Stütze das Trägheitsmoment J konstant ist, die Spitze jedoch durch zwei Stäbe vom Querschnitt F^a und F^i gebildet wird, die ein Dreieck mit der Basis b' bilden (Abb. 12).

Man findet dann durch eine einfache Rechnung, wobei man für den Winkel an der Spitze sin = tang setzt, für den Multiplikator ν in Gl. (15):

$$\nu = \frac{1}{1 - \left(\frac{h^0}{h}\right)^3 \left[1 - \frac{3J}{b'^2}\left(\frac{1}{F^a} - \frac{1}{F^i}\right)\right]}. \tag{28}$$

Besteht der obere Teil der Stütze aus einem Stabe mit dem Trägheitmoment J^0 (Abb. 13), so ist

$$\nu = \frac{1}{1 + \left(\frac{h^0}{h}\right)^3 \left(\frac{J}{J^0} - 1\right)}. \tag{29}$$

Ist die Gliederung der Stütze nicht durch eine einfache Beziehung ausdrückbar, so ergibt sich das gesuchte Ersatzträgheitsmoment J' aus der Gleichung

$$J' = \frac{h^3}{3 \Sigma S_a^2 \frac{s}{F}}, \tag{30}$$

worin die S_a die Spannkräfte im Stützenfachwerk für eine wagerechte Kraft 1 an der Spitze bedeuten.

Die Drehung der Einspannungsquerschnitte der Stützen entsteht durch die Dehnung der Anker und die Zusammendrückungen des Betons und des Bodens. Es soll hiervon nur die erstgenannte Wirkung berücksichtigt werden, wobei angenommen werde, daß sich die Ankerspannungen nach unten nicht vermindern. Zur Berechnung der Unbekannten x, σ_b und Z (Abb. 14) stehen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung:

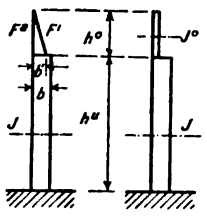

Abb. 12. Abb. 13.

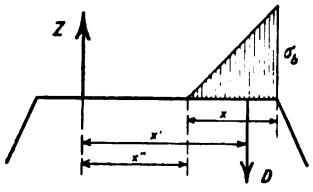

Abb. 14.

$$\begin{cases} Z = \frac{\sigma_b \cdot x}{2} b \\ Z x' = M. \end{cases} \tag{31}$$

Hierin ist b die Breite der Stützenfußplatte. Solange nur wagerechte Lasten an der Stütze angreifen, kann die Lage der Nullinie als konstant angesehen werden. Wir machen nun die Annahmen, daß im Eisen wie im Beton die zulässigen Beanspruchungen gleichzeitig erreicht werden, und haben hierdurch für die Lage der Nullinie:

$$x = 2 \frac{F_e}{b} \frac{\sigma_{e\,\text{zul.}}}{\sigma_{b\,\text{zul.}}}. \tag{32}$$

Diese Annahme ist natürlich sehr willkürlich, da die Lage der Nullinie auch von den senkrechten Lasten abhängt, ganz abgesehen von Anfangsspannungen und Wärmeänderungen der Anker. Da es aber kaum möglich ist, alle diese Einflüsse

Digitized by Google

zutreffend zu schätzen, so soll mit vorstehendem Ergebnis weiter gerechnet werden. Es soll dies nur als ein Versuch aufgefaßt werden, die Nachgiebigkeit der Einspannung, wenn auch nicht mit dem richtigen, so doch mit einem möglichen Werte in die Rechnung einzuführen, wobei wir uns vorbehalten, diesen Einfluß ganz fallen zu lassen, wenn es sich unzweifelhaft zeigt, daß er nur geringfügig ist.

Bedeutet t die Länge der Anker, so beträgt ihre Längenänderung

$$\Delta l = \frac{\sigma_e}{E} \cdot t,$$

woraus man für die Drehung des Einspannungsquerschnittes um die Nullinie erhält:

$$\tau = \frac{\Delta l}{x''} = \frac{\sigma_e t}{E x''}. \tag{33}$$

Für den besonderen Wert τ infolge Last 1 an der Spitze ergibt sich wegen

$$M = 1 \cdot h;\ Z = \frac{h}{x'};\quad \sigma_e = \frac{h}{F x'},$$

$$\tau = \frac{h t}{E F x' x''}. \tag{34}$$

Greift eine Kraft P im Abstande f von oben an, so läßt sich ihre Wirkung ersetzen durch eine gleichgroße und gleichgerichtete Kraft P an der Spitze und ein entgegengesetzt drehendes Kräftepaar Pf. Erstere bewirkt eine Drehung des Einspannungsquerschnittes um $P\tau$, letzteres um $P\tau\frac{f}{h}$, so daß im ganzen entsteht

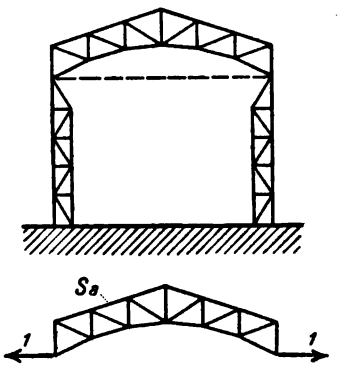

Abb. 15.

$$\tau_P = P\tau(1 - c), \tag{35}$$

worin

$$c = \frac{f}{h}. \tag{36}$$

Es soll nun die Riegelkraft V_0 des einfach statisch unbestimmten Zwischenrahmens berechnet werden.

Besteht der Binderuntergurt aus mehreren Abschnitten von der Länge u_1, u_2 .. mit den Querschnitten F_1, F_2 ..., so ist F^v aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{l}{F^v} = \frac{u_1}{F_1} + \frac{u_2}{F_2} + \cdots$$

Ist der Binderuntergurt nicht gerade (Abb. 15), so bestimmt man F^v aus

$$\frac{l}{F^v} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{F},$$

worin die S_a die Spannkräfte im Binder für Zustand $W^l = W^r = +1$ sind.

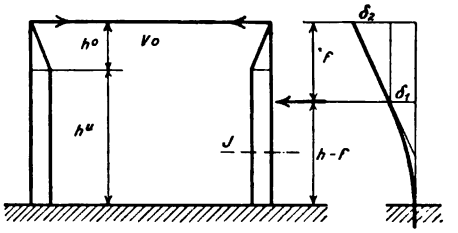

Abb. 16. Abb. 17.

Die Bedingungsgleichung für die Berechnung von V_0 drückt aus, Abb. 16:

$$\delta^l = \delta^r - \frac{V_0 l}{E F^v}.$$

$$\frac{V_0 h^3}{3EJ'} + V_0 \tau h = \frac{P(h-f)^3}{3EJ} + \frac{P(h-f)^2 f}{2EJ} + P\tau(1-c)h - \frac{V_0 h^3}{3EJ'} - V_0 \tau h - \frac{V_0 l}{E F^v}.$$

Digitized by Google

Zur Erläuterung sind in Abb. 17 die beiden ersten Glieder der rechten Seite mit δ_1 und δ_2 bezeichnet. Die Auflösung der Gleichung liefert

$$V_0 = -\frac{P}{2}\mu''\left[c' + \frac{3EJ\tau}{h^2}(1-c)\right], \tag{37}$$

worin

$$c' = 1 - 1{,}5c + 0{,}5c^3, \tag{38}$$

$$\mu'' = \frac{\nu}{v + \frac{3}{2}\frac{l}{h^3}\frac{J'}{F'}}. \tag{39}$$

Die Formeln gelten nur für $f \lesseqgtr h^0$. Greift die Last oben an, so wird $c = 0$ und

$$V_0 = -\frac{P}{2}\mu, \tag{1}$$

worin

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\frac{l}{h^3 v}\frac{J'}{F'}}. \tag{40}$$

Für einen später anzustellenden Vergleich soll noch der Auflagerdruck berechnet werden, den die mit P wagerecht belastete Stütze auf den starr angenommenen Windverband ausüben würde. Nennen wir diesen Druck P', so läßt er sich aus obenstehender Bedingungsgleichung berechnen, wenn man δ^l, δ^r und $l = 0$ setzt, ferner V_0 durch P' ersetzt.

Man findet

$$P' = P\frac{\bar{c}}{v}; \tag{41}$$

hierin ist

$$c = c'\nu + \frac{3EJ'\tau(1-c)}{h^2}. \tag{42}$$

Bei starrer Einspannung der Stützen wird $\tau = 0$, $v = 1$ und

$$P' = Pc'\nu; \tag{43}$$

und für ein konstantes Trägheitsmoment wird $\nu = 1$, also

$$P' = Pc'. \tag{44}$$

Die Werte c' bedeuten die Ordinaten der Einflußlinie für den Auflagerdruck eines an einem Ende starr eingespannten, am andern frei aufliegenden Balkens, auf dieses Ende bezogen.

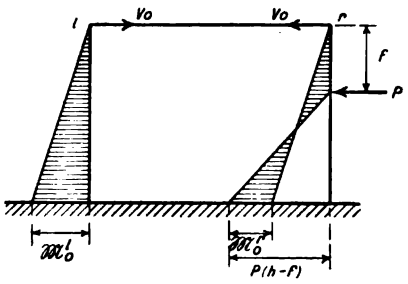

Abb. 18.

Wir gehen nun an die Umformung der Belastungsglieder N, (Gl. 20). Die hierin vorkommenden Ausdrücke $J'\int\frac{M_0 x\,dx}{J}$ lassen sich bei beliebiger Belastung der Stützen und veränderlichem J deuten als statische Momente der mit $\frac{J'}{J}$ multiplizierten Momentenflächen, bezogen auf das obere Stützenende. Für die hier vorausgesetzte Stützenausbildung nach Abb. 12/13 lassen sich jedoch einfache Ausdrücke ableiten.

Am Rahmen r wirkt eine Einzellast P im Abstande f von oben (Abb. 18).

Digitized by Google

Für die linke Stütze ist

$$J'\int_0^h M_0^l \frac{x\,dx}{J} = -V_0 J'\int_0^h \frac{x^2\,dx}{J} = -V_0\frac{h^3}{3}.$$

Für die rechte Stütze ergibt sich

$$J'\int_0^h M_0^r \frac{x\,dx}{J} = J'\left\{-\frac{P}{J}\frac{(h-f)^2}{2}\left[f+\frac{2}{3}(h-f)\right]-\frac{V_0 h^2}{2J'}\cdot\frac{2}{3}h\right\}.$$

Mit

$$c=\frac{f}{h},\quad c'=1-1{,}5\,c+0{,}5\,c^3,\quad J'=J\nu$$

erhält man

$$J'\int_0^h \frac{M_0^r x\,dx}{J} = -P\frac{h^3}{3}c'\nu-\frac{V_0 h^3}{3}.$$

Für die Drehungen τ_0 der Einspannungsquerschnitte findet man:

$$\tau_0^l=-V_0\tau;\quad \tau_0^r=-V_0\tau-P\tau(1-c).$$

Das normale Belastungsglied (20) nimmt nun folgende Form an:

$$\begin{aligned}(45)\qquad N_r = +EJ'ah[&-\mu(-V_{(r-1)0}\tau)+\mu'[-V_{(r-1)0}\tau-P_{r-1}\tau(1-c_{r-1})]\\&-\mu'(-V_{(r+1)0}\tau)+\mu[-V_{(r+1)0}\tau-P_{r+1}\tau(1-c_{r+1})]\\&+a\mu e k^v(V_{(r-1)0}-V_{(r+1)0})+2P_r\tau(1-c_r)]\\&-a\frac{h^3}{3}(-\mu V_{(r-1)0}+\mu' P_{r-1}c'_{r-1}\nu+V_{(r-1)0}\mu'\\&\qquad+2V_{r0}\quad-2P_r c'_r\nu\quad-2V_{r0}\\&\qquad-\mu V_{(r+1)0}+\mu P_{r+1}c'_{r+1}\nu+\mu V_{(r+1)0}).\end{aligned}$$

Hierin bedeutet

P_{r-1} = Last am Rahmen $r-1$ mit zugehörigem c_{r-1} und c'_{r-1} usw.

Besonders einfache Ausdrücke für die Normalglieder ergeben sich, wenn P zur Hälfte an jeder Stütze angreift (Wind auf das Dach, Bremskräfte der Kranlasten). Es wird $V_0=0$ und

$$\begin{aligned}(46)\qquad N_r = +EJ'ah[&-\mu' P_{r-1}\tau(1-c_{r-1})-\mu P_{r+1}\tau(1-c_{r+1})+2P_r\tau(1-c_r)]\\&+\frac{ah^3}{3}\nu(-\mu' P_{r-1}c'_{r-1}+2P_r c'_r-\mu P_{r+1}c'_{r+1}).\end{aligned}$$

Beim Durchrechnen von Zahlenbeispielen hat sich gezeigt, daß es für die Auflösung der Elastizitätsgleichungen zulässig ist, $F^v=\infty$ zu setzen, soweit nicht etwa Binder nach Abb. 15 vorliegen. Es wird dann $\mu=\mu'=1$, $k^v=0$, und die Normalglieder (45) ergeben sich ähnlich wie für den in Gl. (46) vorausgesetzten Belastungsfall:

$$\begin{aligned}(47)\qquad N_r = +EJ'ah[&-P_{r-1}\tau(1-c_{r-1})+2P_r\tau(1-c_r)-P_{r+1}\tau(1-c_{r+1})]\\&+\frac{ah^3}{3}\nu(-P_{r-1}c'_{r-1}+2P_r c'_r-P_{r+1}c'_{r+1}).\end{aligned}$$

Greifen an einem Rahmen r gleichzeitig mehrere Kräfte P_r an, so ist $P_r c'_r$ durch $\Sigma P_r c'_r$ zu ersetzen, ebenso bei $r-1$ und $r+1$.

Digitized by Google

Berechnet man für einen bestimmten Belastungsfall nach vorstehender Gleichung alle Glieder N_1, $N_2 \ldots N_{(n-1)}$, so sind hiermit die Unbekannten durch das im § 3 abgeleitete System von Elastizitätsgleichungen gegeben.

Um Einflußlinien zu erhalten, sei nur Rahmen r durch P belastet. Es ergibt sich dann

$$N_{r-1} = -EJ'ahP\tau(1-c) - P\frac{ah^3}{3}c'\nu,$$

$$N_r = +2EJ'ahP\tau(1-c) + 2\frac{Pah^3}{3}c'\nu, \tag{48}$$

$$N_{r+1} = N_{r-1},$$

die übrigen N werden Null.

Es folgt daher aus Gl. (27) Seite 9 bei diesem Belastungszustand für X_{ir}:

$$X_{ir} = \beta_{i(r-1)}N_{r-1} + \beta_{ir}N_r + \beta_{i(r+1)}N_{r+1},$$

und wegen

$$N_r = -2N_{r-1} = -2N_{r+1}:$$

$$X_{ir} = P\frac{ah^3}{3}\bar{c}\,\eta_{ir} = PK'\eta_{ir}. \tag{49}$$

Hierin ist $\bar{c}$ durch Gl. (42) gegeben und

$$\eta_{ir} = (-\beta_{i(r-1)} + 2\beta_{ir} - \beta_{i(r+1)}). \tag{50}$$

Die η_{ir} stellen die zweiten Differenzen der β-Werte dar; einer Last P, die nacheinander am Rahmen 1, 2, ... wirkt, entsprechen die Ordinaten η_{i1}, $\eta_{i2}\ldots$, durch welche die Einflußlinie für X_i bestimmt ist, wenn P an jedem Rahmen in gleicher Höhe wirkt.

Greift P unmittelbar am Windverbande an, so wird mit $\mu = 1$:

$$\int_0^h \frac{M_0^l x\,dx}{J} = +\frac{P}{2}\frac{h^3}{3J'},$$

$$\int_0^h \frac{M_0^r x\,dx}{J} = -\frac{P}{2}\frac{h^3}{3J'},$$

$$\tau_0^l = +\frac{P}{2}\tau, \quad \tau_0^r = -\frac{P}{2}\tau,$$

und man erhält aus Gl. (47) für die drei Belastungsglieder:

$$N_r = 2PEJ'ah\tau + 2P\frac{ah^3}{3} = -2N_{r-1} = -2N_{r+1},$$

also

$$X_{ir} = P\frac{ah^3}{3}v\,r_{ir} = PK\eta_{ir}. \tag{51}$$

Dies Ergebnis läßt sich auch aus Gl. (42) und (49) folgern, indem für $c = 0$ $c' = 1$ wird, und an die Stelle von ν ebenfalls 1 treten muß, wodurch $\bar{c}$ in v übergeht.

Der Einfluß der Höhenlage des Angriffspunktes von P auf die statisch unbestimmten Größen ist durch $\bar{c}$ gegeben; die lotrechten Schnittflächen des Einflußkörpers in Abb. 2 sind innerhalb des konstanten Teils der Stützen durch Gleichung (49) bestimmt, während die Ordinaten in der Ebene des Windverbandes dem durch Gl. (51) ausgedrückten Gesetze folgen.

Digitized by Google

§ 5. Zahlenbeispiel.

Die Figuren 19 und 20 zeigen eine einschiffige Halle von 16 m Spannweite mit sieben Feldern von je 10 m Länge. Es ist dann

$$d = \sqrt{16^2 + 10^2} = 18{,}9 \text{ m}; \quad \operatorname{tg}\varphi = 2a = 1{,}6; \quad a = 0{,}8;$$
$$\cos\varphi = \frac{10}{18{,}9} = 0{,}53; \quad \cos^2\varphi = 0{,}28.$$

Die Stützen werden von je 4 ⊏ N. P. 30 gebildet. Es ist

$$J = 4(8026 + 58{,}8 \cdot 50^2) = 620\,000 \text{ cm}^4.$$

Die Stäbe der Spitze seien

außen 2 ⊏ N. P. 18; $F_a = 56$ qcm, $\frac{1}{F_a} = 0{,}0179$;

innen 2 ⊏ N. P. 12; $F_i = 34$ » , $\frac{1}{F_i} = 0{,}0294$.

Mit $h^0 = 3{,}00$ m, $b' = 0{,}80$ m, $\frac{h^0}{h} = \frac{3{,}00}{14{,}75} = 0{,}203$ erhält man

$$\nu = \frac{1}{1 - 0{,}203^3\left(1 - \frac{1\,860\,000}{6400} \cdot 0{,}0473\right)} = 0{,}905.$$

$$J' = J\nu = 560\,000 \text{ cm}^4 = 0{,}0056 \text{ m}^4.$$

$$EJ' = 20\,000\,000 \cdot 0{,}0056 = 112\,000 \text{ tm}^2.$$

Der niedrige Wert von E soll die in J' fehlende Berücksichtigung des elastischen Gitterwerks der Stütze wieder einigermaßen ausgleichen.

$$k^w = \frac{J'}{F^w} = \frac{0{,}0056}{0{,}0080} = 0{,}7$$

$$k^d = \frac{J'}{F^d} = \frac{0{,}0056}{0{,}0060} = 0{,}93$$

$$k^v = \frac{J'}{F^v} = \frac{0{,}0056}{0{,}0040} = 1{,}4.$$

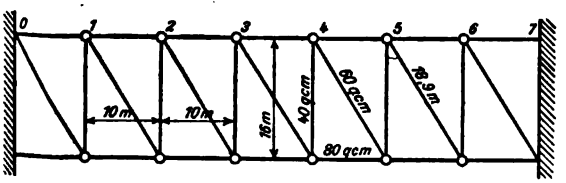

Abb. 19.

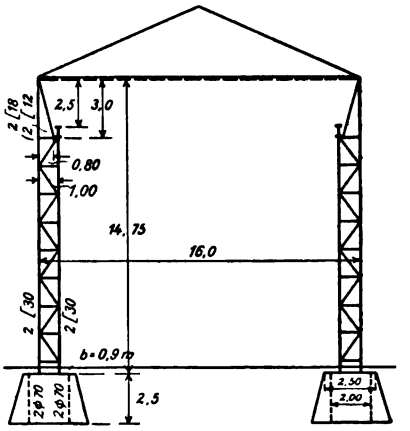

Abb. 20.

Für die Einspannung nehmen wir beiderseits zwei Rundeisen von 70 mm als Anker an mit $F_e = 2 \cdot 38{,}5 = 77$ qcm, die Fußplatte sei $0{,}90 \cdot 2{,}50$ m groß. Dann ergibt sich die Lage der Nullinie nach den Voraussetzungen von S. 10 mit $\sigma_{b\,\text{zul.}} = 15$ und $\sigma_{e\,\text{zul.}} = 800$ kg/qcm:

Digitized by Google

$$x = \frac{2 \cdot 77 \cdot 800}{90 \cdot 15} = 91 \text{ cm}; \quad x' = 1{,}95 \text{ m}; \quad x'' = 1{,}34 \text{ m}.$$

$$\tau = \frac{ht}{EF_s x' x''} = \frac{14{,}75 \cdot 2{,}5}{20\,000\,000 \cdot 0{,}0077 \cdot 1{,}95 \cdot 1{,}34} = 0{,}000\,092.$$

$$v = 1 + \frac{3 \cdot 112\,000}{14{,}75^2} \cdot 0{,}000\,092 = 1{,}14.$$

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot 16 \cdot 1{,}4}{2 \cdot 14{,}75^3 \cdot 1{,}14}} = \frac{1}{1{,}0092} = 0{,}991.$$

Bildung der Koeffizienten:

$$\alpha = \frac{2}{3} a^2 h^3 = \frac{2 \cdot 0{,}64 \cdot 14{,}75^3}{3} = 1370$$

$$\gamma = \lambda k^w = 10 \cdot 0{,}70 = 7$$

$$\delta = \frac{d k^d}{\cos^2 \varphi} = \frac{18{,}9 \cdot 0{,}93}{0{,}28} = 63$$

$$\varepsilon = a^2 e k^v \mu^2 = 0{,}64 \cdot 16 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}98 = 14$$

$$\vartheta = EJ' 2 a^2 h \tau = 112\,000 \cdot 2 \cdot 0{,}64 \cdot 14{,}75 \cdot 0{,}000\,092 = 195$$

$$\alpha' = \alpha + \vartheta = 1370 + 195 = 1565$$

$$4\alpha' = 6260$$

$$5\alpha' = 7825$$

$$6\alpha' = 9390$$

$$\alpha' - \varepsilon = 1565 - 14 = 1551$$

$$4\alpha' + \delta = 6260 + 63 = 6323$$

$$5\alpha' + 2(\gamma + \delta) + \varepsilon = 7825 + 140 + 14 = 7979$$

$$6\alpha' + 2(\gamma + \delta + \varepsilon) = 9390 + 168 = 9558.$$

Es lautet jetzt das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllllll}
1) & -X_1[5\alpha'+2(\gamma+\delta)+\varepsilon]+X_2(4\alpha'+\delta)-X_3(\alpha'-\varepsilon) & & & & & = N_1 \\
2) & +X_1(4\alpha'+\delta)-X_2(6\alpha'+2\gamma')+X_3(4\alpha'+\delta) & -X_4(\alpha'-\varepsilon) & & & & = N_2 \\
3) & -X_1(\alpha'-\varepsilon) & +X_2(4\alpha'+\delta) & -X_3(6\alpha'+2\gamma')+X_4(4\alpha'+\delta) & -X_5(\alpha'-\varepsilon) & & = N_3 \\
4) & -X_2(\alpha'-\varepsilon) & +X_3(4\alpha'+\delta) & -X_4(6\alpha'+2\gamma')+X_5(4\alpha'+\delta) & -X_6(\alpha'-\varepsilon) & & = N_4 \\
5) & & -X_3(\alpha'-\varepsilon) & +X_4(4\alpha'+\delta) & -X_5(6\alpha'+2\gamma')+X_6(4\alpha'+\delta) & & = N_5 \\
6) & & -X_4(\alpha'-\varepsilon) & +X_5(4\alpha'+\delta) & -X_6[5\alpha'+2(\gamma+\delta)+\varepsilon] & & = N_6,
\end{array}$$

wobei $\gamma + \delta + \varepsilon$ mit γ' bezeichnet worden ist. In Zahlen:

$$\begin{array}{lllllll}
1) & -X_1 \cdot 7979 + X_2 \cdot 6323 - X_3 \cdot 1551 & & & & & = N_1 \\
2) & +X_1 \cdot 6323 - X_2 \cdot 9558 + X_3 \cdot 6323 - X_4 \cdot 1551 & & & & & = N_2 \\
3) & -X_1 \cdot 1551 + X_2 \cdot 6323 - X_3 \cdot 9558 + X_4 \cdot 6323 - X_5 \cdot 1551 & & & & & = N_3 \\
4) & & -X_2 \cdot 1551 + X_3 \cdot 6323 - X_4 \cdot 9558 + X_5 \cdot 6323 - X_6 \cdot 1551 & & & & = N_4 \\
5) & & & -X_3 \cdot 1551 + X_4 \cdot 6323 - X_5 \cdot 9558 + X_6 \cdot 6323 & & & = N_5 \\
6) & & & & -X_4 \cdot 1551 + X_5 \cdot 6323 - X_6 \cdot 7979 & & = N_6.
\end{array}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems und Darstellung der Unbekannten in der Form

$$X_i = \beta_{i1} N_1 + \beta_{i2} N_2 + \cdots + \beta_{ir} N_r + \cdots + \beta_{i(n-1)} N_{(n-1)}$$

Digitized by Google

geschieht nach dem Eliminationsverfahren, wobei von der Symmetrie des Systems Gebrauch gemacht werden kann, indem man die Unbekannten

$$Y_1 = X_1 + X_6\,, \qquad Y_2 = X_2 + X_5\,, \quad \text{usw.}$$
$$Z_1 = X_1 - X_6\,, \qquad Z_2 = X_2 - X_5\,, \quad »$$

einführt, wodurch zwei Gleichungssysteme entstehen, die nur je drei Unbekannte enthalten. Man erhält:

$$X_1 = -0{,}8592\,N_1 - 1{,}2459\,N_2 - 1{,}3036\,N_3 - 1{,}1394\,N_4 - 0{,}8317\,N_5 - 0{,}4376\,N_6$$
$$X_2 = -1{,}2459\,N_1 - 2{,}1546\,N_2 - 2{,}3742\,N_3 - 2{,}1252\,N_4 - 1{,}5709\,N_5 - 0{,}8317\,N_6$$
$$X_3 = -1{,}3036\,N_1 - 2{,}3742\,N_2 - 2{,}9727\,N_3 - 2{,}8023\,N_4 - 2{,}1252\,N_5 - 1{,}1394\,N_6$$
$$X_4 \text{ wie } X_3\,, \quad X_5 \text{ wie } X_2\,, \quad X_6 \text{ wie } X_1$$

von rechts nach links gelesen. Die β sind in vorstehenden Gleichungen mit 1000 multipliziert.

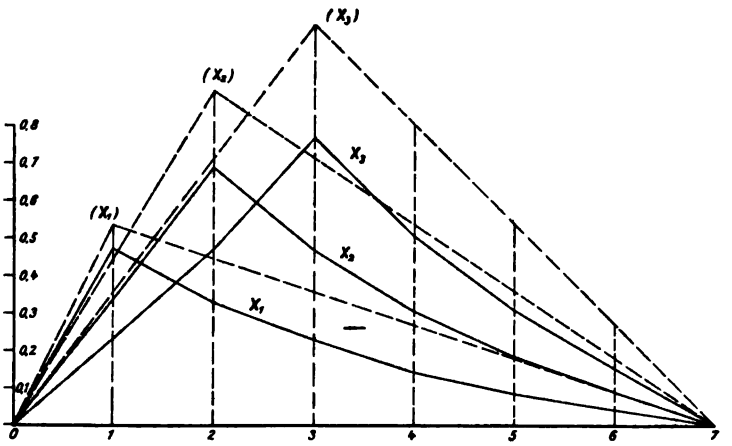

Abb. 21.

Die Ordinaten η der Einflußlinien erhält man nach (50) durch Bildung der zweiten Differenzen. Es ergibt sich

	für X_1	für X_2	für X_3
η_1	— 0,4725	— 0,3372	— 0,2330
η_2	— 0,3290	— 0,6891	— 0,4721
η_3	— 0,2219	— 0,4686	— 0,7689
η_4	— 0,1435	— 0,3053	— 0,5067
η_5	— 0,0864	— 0,1849	— 0,3087
η_6	— 0,0435	— 0,0925	— 0,1536
$\Sigma =$	— 1,2968	— 2,0776	— 2,4430

Mit diesen Werten sind die X-Linien in Abb. 21 aufgetragen worden.

Alle Ordinaten haben sich negativ ergeben. Um X zu erhalten, muß man mit

$$\frac{PK'}{1000} = \frac{Pah^3}{1000 \cdot 3}\,\bar{c}$$

multiplizieren, worin die Veränderlichkeit des Angriffspunktes von P der Höhe nach durch $\bar{c}$ nach Gl. (42) Seite 12 ausgedrückt wird. Wirkt die Last an der Spitze, so lautet der Faktor

$$PK = \frac{Pah^3}{3 \cdot 1000}\,v \quad \text{vgl. Gl. (51).}$$

Digitized by Google

Zum Vergleich sei der Fall betrachtet, daß der Windverband starr ist. Die Einflußlinien der X müssen dann mit denen für die Gurtstäbe eines einfachen Balkens übereinstimmen.

Für die Ordinate $\eta_{max.}$ der X_m-Linie erhält man dann nach Abb. 22:

$$\eta_{max.} = \frac{m(n-m)\lambda}{en}, \tag{52}$$

also z. B. für $m = 3$, da $n = 7$, $e = 16$ m, $\lambda = 10$ m:

$$\eta_{3\,max.} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{16 \cdot 7} = 1{,}07\,.$$

Da bei diesem Vergleich die Lasten nur am Windverbande wirken sollen, so sind die η der X-Linien mit

$$K = \frac{ah^3}{3} v = \frac{0{,}8 \cdot 14{,}75^3}{3} \cdot 1{,}14 = 977$$

zu multiplizieren.

Es hat also die Einheit der Ordinaten in Abb. 21 den Wert 0,977, und $\eta_{3\,max.}$ wird $\frac{1{,}07}{0{,}977} = 1{,}095$ cm Einheiten groß aufgetragen. Ebenso werden die übrigen X-Linien des starren Windverbandes hinzugefügt, es zeigt sich deutlich der Einfluß der Nachgiebigkeit des wirklichen Stabwerkes. Im Gleichungssystem (19) drückt sich die Starrheit des Windverbandes dadurch aus, daß γ, δ, $\varepsilon = 0$ werden. Es bleibt dann bei jedem Gliede der linken Seite α' als Koeffizient. Beachtet man, daß nach Gl. (26) Seite 9

$$\alpha' = \frac{2}{3} a^2 h^3 v\,,$$

so ist

$$K = \frac{\alpha'}{2a}, \tag{53}$$

es läßt sich also das ganze Gleichungssystem durch α' dividieren, wodurch der Einfluß der Elastizität sämtlicher Stäbe verschwindet, und sich für einen bestimmten Belastungsfall $P = 1$ in m die Werte als Wurzeln der Gleichungen ergeben, die in Abb. 21 auf der Ordinate durch m von den Seiten der X-Dreiecke abgeschnitten werden.

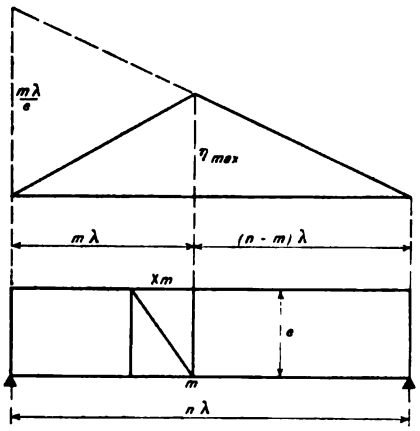

Abb. 22.

Wirkt an jedem Rahmen in gleicher Höhe die gleichgroße Kraft P, so erhält man

$$X_i = K' P \cdot \sum_{1}^{n-1} \eta_{ir}\,. \tag{54}$$

Es bietet jedoch keine Schwierigkeiten, für diesen besonderen Belastungsfall das Gleichungssystem noch einmal aufzulösen. Es wird nämlich in Gl. (45) Seite 13

$$\begin{aligned} N_r = 0 \text{ wegen } & P_{r-1} = P_r = P_{r+1} \\ & c_{r-1} = c_r \;\; = c_{r+1} \\ & c'_{r-1} = c'_r \;\; = c'_{r+1} \text{ von } r = 2 \text{ bis } r = n-2, \end{aligned}$$

Digitized by Google

so daß nur die erste und letzte Elastizitätsgleichung ein Belastungsglied haben. Man findet

$$N_1 = EJ'ah[-P\tau(1-c)+2P\tau(1-c)]+\frac{ah^3}{3}\nu(+2Pc'-Pc')$$
$$=\frac{Pah^3}{3}\left[c'\nu+\frac{3EJ'}{h^2}\tau(1-c)\right]=PK'.$$

Ebenso ergibt sich N_{n-1}.

Auch der Verschiebungsplan Abb. 10 beweist, daß die normalen Belastungsglieder gleich Null werden. Es ist δ_{0r} die Verschiebungsarbeit der an den Rahmen $r-1$, r, $r+1$ wirkenden Kräfte P während des Zustandes $X_r=-1$. Da sich Rahmen r in entgegengesetzter Richtung, und zwar um das doppelte Maß ausbiegt gegenüber den Nachbarrahmen, so verrichten die drei Kräfte P die Arbeit

$$\delta_{0r}=P\delta-2P\delta+P\delta=0,$$

wenn man $\mu=\mu'=1$ setzt. Deutet man die Belastungsglieder durch $\delta_{,0}$, so stellt dieser Wert die Arbeit der statisch unbestimmten Größen X_r während des Verschiebungszustandes $X=0$ dar. Hierbei verschieben sich die Felder des Windverbandes mit Ausnahme der beiden Endfelder nur parallel, so daß die Schnittflächen der durchschnittenen Gurtstäbe keine gegenseitige Verschiebung erleiden.

Da $X_6=X_1$, $X_5=X_2$, $X_4=X_3$ wird, so brauchen nur die drei ersten Gleichungen des Systems verwendet zu werden.

$$\begin{aligned}
1)\quad & -X_1\cdot 7979+X_2\cdot 6323-X_3\cdot 1551=+PK'\\
2)\quad & +X_1\cdot 6323-X_2\cdot 9558+X_3\cdot 4772=0\\
3)\quad & -X_1\cdot 1551+X_2\cdot 4772-X_3\cdot 3235=0,
\end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$X_1=-0{,}001\,296\,7\,PK';\quad X_2=-0{,}002\,077\,7\,PK';\quad X_3=-0{,}002\,442\,9\,PK',$$

was mit den Summen der Ordinaten S. 17 übereinstimmt.

Es sei hier noch der Fall betrachtet, daß die Endabschlüsse der Halle nicht aus starren Giebelwänden bestehen, sondern den Zwischenrahmen völlig gleichen. Man erhält dann die vier Endgleichungen ohne weiteres aus den Normalgleichungen, wenn man $r=2$ und $r=1$, am andern Ende $r=n-2$ und $r=n-1$ setzt, also

$$(55)\quad\begin{cases}
-X_1(6\alpha'+2\gamma')+X_2(4\alpha'+\delta)-X_3(\alpha'-\varepsilon) & =N_1\\
+X_1(4\alpha'+\delta)-X_2(6\alpha'+2\gamma')+X_3(4\alpha'+\delta)-X_4(\alpha'-\varepsilon) & =N_2\\
-X_1(\alpha'-\varepsilon)+X_2(4\alpha'+\delta)-X_3(6\alpha'+2\gamma')+X_4(4\alpha'+\delta)-X_5(\alpha'-\varepsilon) & =N_3
\end{cases}$$

usw.

Die Auflösung erfolgt genau wie vorher. Man erhält:

$$\begin{aligned}
X_1=&-0{,}000\,325\,3\,N_1-0{,}000\,444\,0\,N_2-0{,}000\,426\,7\,N_3-0{,}000\,329\,7\,N_4\\
&-0{,}000\,199\,2\,N_5-0{,}000\,076\,1\,N_6;\\
X_2=&-0{,}000\,444\,0\,N_1-0{,}000\,909\,8\,N_2-0{,}000\,973\,0\,N_3-0{,}000\,791\,4\,N_4\\
&-0{,}000\,495\,3\,N_5-0{,}000\,199\,2\,N_6;\\
X_3=&-0{,}000\,426\,7\,N_1-0{,}000\,973\,0\,N_2-0{,}001\,346\,3\,N_3-0{,}001\,202\,8\,N_4\\
&-0{,}000\,791\,4\,N_5-0{,}000\,329\,7\,N_6.
\end{aligned}$$

Die Einflußlinien erhält man auch hier auf dem S. 14 beschriebenen Wege, indem man Rahmen r allein belastet und die Belastungsglieder bildet. Es ergibt sich

$$X_{ir}=PK'\eta_{ir},\quad \text{worin}$$
$$\eta_{ir}=(-\beta_{i(r-1)}+2\beta_{ir}-\beta_{i(r+1)}).$$

Digitized by Google

Die Ausrechnung der zweiten Differenzen der β-Werte liefert die Tabelle der Ordinaten η. Diese sind in Abb. 23 als Einflußlinien aufgetragen worden, es zeigt sich die große Steifigkeit des Windverbandes im Vergleich zur Elastizität der Stützen. Wirkt gleichzeitig an jedem Rahmen in gleicher Höhe (c, c' konst.) die Last P, so erleidet der Windverband einfach eine Parallelverschiebung, ohne in Tätigkeit zu treten. Es muß sich dann $X_1 = 0$, $X_2 = 0 \ldots$ ergeben, da alle $N = 0$ sind. Für jedes X gilt also

$$\sum_0^n \eta = 0, \tag{56}$$

was in der folgenden Tabelle zutrifft.

	X_1	X_2	X_3
η_0	+ 0,3253	+ 0,4440	+ 0,4267
1	− 0,2066	+ 0,0218	+ 0,1196
2	− 0,1360	− 0,4026	− 0,1730
3	− 0,0797	− 0,2448	− 0,5168
4	− 0,0335	− 0,1145	− 0,2679
5	+ 0,0074	0	− 0,0503
6	+ 0,0470	+ 0,0969	+ 0,1320
7	+ 0,0761	+ 0,1992	+ 0,3297
$\Sigma(+\eta)$	+ 0,4558	+ 0,7619	+ 1,0080
$\Sigma(-\eta)$	− 0,4558	− 0,7619	− 1,0080

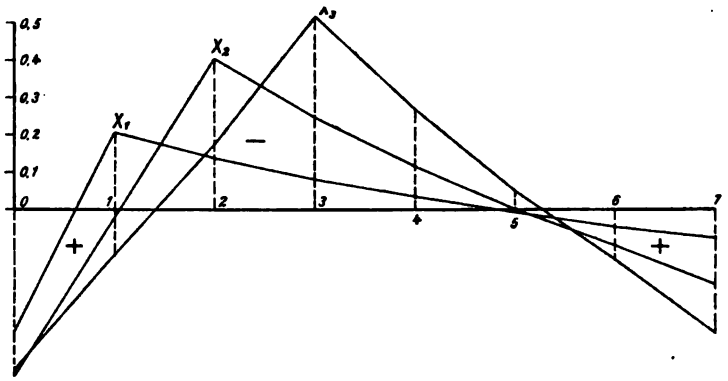

Abb. 23.

Wir kehren zum Falle starrer Stützung an den Enden zurück. Durch die Einflußlinien für die X ist die Aufgabe gelöst.

Für eine Diagonale des Windverbandes gilt z. B. nach Gl. (7) S. 4:

$$D_r = \frac{1}{\cos\varphi}(-X_r + X_{r-1}),$$

und für eine Last P_m am Rahmen m:

$$D_{r_m} = \frac{P_m K'}{\cos\varphi}(\eta_{(r-1)m} - \eta_{rm}).$$

Digitized by Google

Die Auflagerkräfte an den Giebelwänden sind gleich den Seitenkräften der Enddiagonalen parallel zur Wand, also

57) $$A = -X_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi = -X_1 \cdot 2a$$
$$B = -X_{(n-1)}\,2a\,.$$

In Abb. 24 sind die D_r-Linie und A-Linie dargestellt.

Ein gutes Bild von der lastverteilenden Wirkung des Windverbandes erhält man, wenn man seinen Gleichgewichtszustand mit dem eines einfachen Balkens ver-

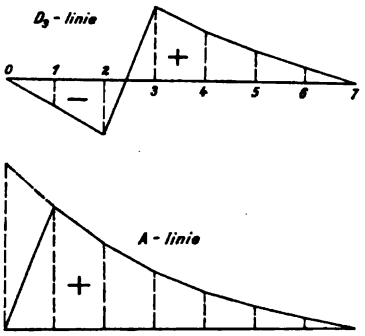

Abb. 24.

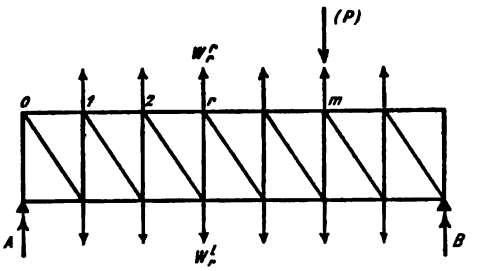

Abb. 25.

gleicht. Die Lasten werden gebildet durch die Differenzen der W-Kräfte, nennen wir sie P^w, so gilt:

(58) $$P_r^w = W_r^l - W_r^r,$$

und mit Gl. (8) S. 4 findet man:

(59) $$P_r^w = 2a(X_{r-1} - 2X_r + X_{r+1})\,.$$

Wirkt am Rahmen m die einzige Last P, so wird

$$X_{(r-1)m} = PK'\eta_{(r-1)m}; \quad X_{rm} = PK'\eta_{rm}; \quad X_{(r+1)m} = PK'\eta_{(r+1)m};$$

(60) $$P_{rm}^w = 2aPK'(\eta_{(r-1)m} - 2\eta_{rm} + \eta_{(r+1)m})\,.$$

Wirkt beispielsweise P am Rahmen $m = 3$, so ergeben sich folgende Knotenpunktlasten des Windverbandes:

$$P_{13}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(\ \ 0 \qquad + 2 \cdot 0{,}2218 - 0{,}4686) = -0{,}000\,040\,0\,PK'$$

$$P_{23}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}2218 + 2 \cdot 0{,}4686 - 0{,}7688) = -0{,}000\,085\,4\,PK'$$

$$P_{33}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}4686 + 2 \cdot 0{,}7688 - 0{,}5067) = +0{,}000\,899\,7\,PK'$$

$$P_{43}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}7688 + 2 \cdot 0{,}5067 - 0{,}3054) = -0{,}000\,097\,3\,PK'$$

$$P_{53}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}5067 + 2 \cdot 0{,}3054 - 0{,}1435) = -0{,}000\,063\,0\,PK'$$

$$P_{63}^w = \frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}3054 + 2 \cdot 0{,}1435 - 0\ \ \ \ \ ) = -0{,}000\,029\,4\,PK'$$

$$A_3 = -\frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}2218) = +0{,}000\,354\,9\,PK',$$

$$B_3 = -\frac{PK'}{1000} \cdot 1{,}6(-0{,}1435) = +0{,}000\,229\,6\,PK'.$$

Digitized by Google

Durch die Kräfte P^w, A, B ist der Belastungszustand des Windverbands gegeben. Bei starrem Windverband überträgt nur der belastete Rahmen 3 den Druck

$$P' = P\frac{\bar{c}}{v},$$

vgl. Gl. (41) S. 12, wofür man auch schreiben kann, wegen $\bar{c} = \frac{3K'}{ah^3}$:

$$P' = PK' \cdot \frac{3}{ah^3 v}. \tag{61}$$

Mit den Zahlen des Beispiels ergibt sich

$$P' = PK' \cdot \frac{3}{0{,}8 \cdot 3209 \cdot 1{,}14} = 0{,}001\,025\,PK'.$$

Die Abb. 26 zeigt den Gleichgewichtszustand bei elastischem und starrem Windträger. Die Kräfte P^w an den unbelasteten Knotenpunkten nehmen fast gerad-

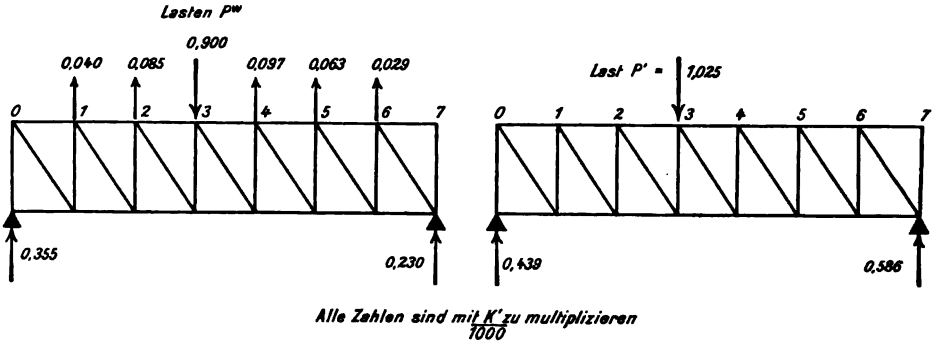

Abb. 26.

linig nach dem belasteten Rahmen hin zu. Das Gleichgewicht der Kräfte P^w mit den Auflagerkräften A und B folgt auch ohne weiteres aus:

$$A + B + \Sigma P^w = 0:$$

$$PK'2a\left[\eta_{1m} + \sum_{r=1}^{r=n-1}\left[\eta_{(r-1)m} - 2\eta_{rm} + \eta_{(r+1)m}\right] + \eta_{(n-1)m}\right] = 0.$$

Wirkt die Kraft unmittelbar am Windverband ($c = 0$), so tritt K an Stelle von K', ferner ist $P' = P$.

In unserem Falle war $K = 977$ (vgl. S. 17), der Druck im Punkte 3 beträgt also nur $977 \cdot 0{,}000\,899\,7 = 0{,}88$, d. h. 12% weniger. Ebenso wie der Windverband infolge seiner Nachgiebigkeit entlastet wird, werden die Stützen in stärkerem Maße zur Aufnahme der horizontalen Kräfte herangezogen.

In Abb. 27 sind in I für Rahmen 3 die wirklichen Werte P^w für $c = 0$ bis $c = 1$ aufgetragen worden, dazu zum Vergleich P^w für starren Windträger (II), ferner für letzteren Fall noch mit $\tau = 0$ (starre Einspannung) in Kurve III, endlich für J konstant, also $\nu = 1$ (IV). Es stellt also dar

Kurve IV die Werte $c' = 1 - 1{,}5c + 0{,}5c^3$,
» III » » $c'\nu = 0{,}905\,c'$,

Digitized by Google

Kurve II die Werte $P' = \frac{\bar{c}}{v} = \dfrac{c'\nu + \dfrac{3EJ'\tau(1-c)}{h^2}}{1 + \dfrac{3EJ'\tau}{h^2}}$,

» I » » $0{,}0009\,K' = P_{33}^{w}$;

diese gilt nur für Rahmen 3.

Bei starrer Einspannung der Stützen und $J' = J$ würde noch eine erheblich größere Entlastung des Windverbandes eintreten, die vorliegende Untersuchung kann also als zu ungünstig nicht bezeichnet werden. Der Unterschied zwischen den

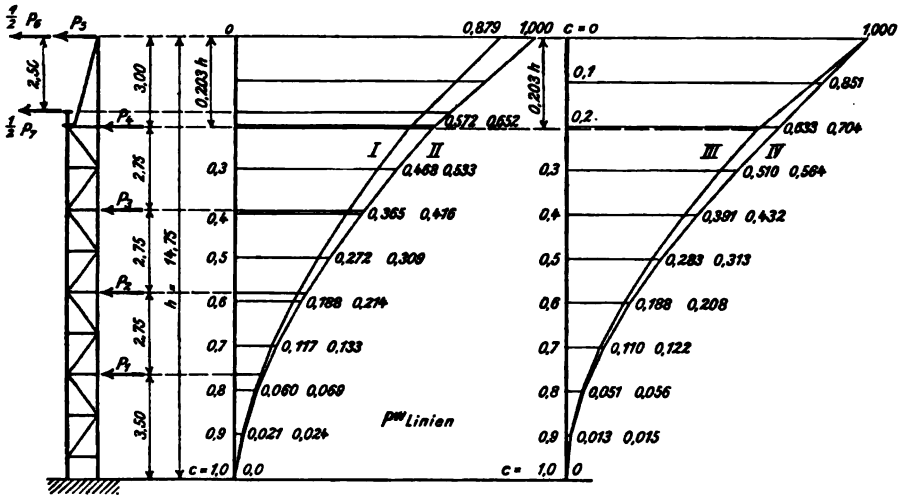

Abb. 27.

Kurven I und II, an denen die Teilnahme des wirklichen elastischen und eines gedachten starren Windverbandes an der Aufnahme wagerechter Kräfte verglichen werden kann, scheint nur gering zu sein. Es wird sich jedoch zeigen, wie trotzdem eine weit größere Beanspruchung der Stützen eintritt.

Nach Gl. (8) S. 4 gilt für die Spannkräfte W:

$$W_r^l = V_{r0} + a\mu' X_{r-1} - 2aX_r + a\mu X_{r+1},$$
$$W_r^r = V_{r0} - a\mu X_{r-1} + 2aX_r - a\mu' X_{r+1}.$$

Vernachlässigt man die Formänderung des Querriegels, was stets zulässig ist, wenn der Binderuntergurt gerade oder fast gerade ist, setzt also $F^v = \infty$, so wird $\mu = \mu' = 1$ und nach Gl. (39) S. 12

(62) $$\mu'' = \frac{\nu}{v} \quad \text{und} \quad V_0 = -\frac{P\bar{c}}{2v} = -PK'\frac{3}{2ah^3v}.$$

Wirkt nur am Rahmen r die Einzellast P, so sind die statisch unbestimmten Größen X_{ir} durch $PK'\eta_{ir}$ auszudrücken.

$$W_r^r = -PK'a\left[\frac{3}{2a^2h^3v} + (\eta_{(r-1)r} - 2\eta_{rr} + \eta_{(r+1)r})\right],$$

wofür man auch schreiben kann, wegen $\frac{2}{3}a^2h^3 = \alpha$:

(63) $$W_r^r = -PK'a\left[\frac{1}{\alpha v} + (\eta_{(r-1)r} - 2\eta_{rr} + \eta_{(r+1)r})\right].$$

Digitized by Google

Wirkt an jedem Rahmen die gleiche Last P in gleicher Höhe, so ist

$$X_i = PK' \Sigma \eta_i ,$$

und es entsteht

$$W_r^r = - PK' a \left[\frac{1}{\alpha v} + (\Sigma \eta_{(r-1)} - 2 \Sigma \eta_r + \Sigma \eta_{(r+1)}) \right]. \tag{64}$$

Greifen die Lasten zur Hälfte an jeder Stütze an, so ist $V_0 = 0$, und das Glied $\frac{1}{\alpha v}$ fällt weg.

Für die Einflußlinie erhält man die in Abb. 28 dargestellte Form, die Last bei r ist für W_r ausschlaggebend.

Es liege ein Belastungszustand nach Abb. 29 vor. Die Kräfte P_1 bis P_6 wirken an jedem Rahmen in gleicher Größe, davon P_1 bis P_5 (Winddruck auf die Längswand) auf den Außengurt der rechten Stütze, P_6 (Winddruck auf das Dach) zu gleichen

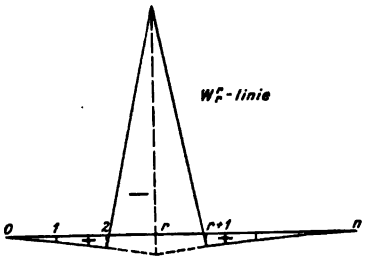

Abb. 28.

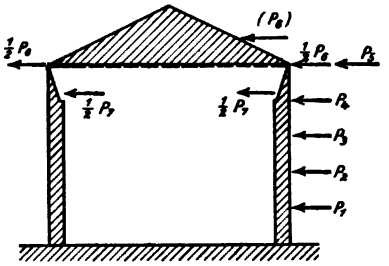

Abb. 29.

Teilen an jedem Stützende. P_7 stellt die von dem Laufkran herrührende Einzellast dar, die gerade am Rahmen r wirken soll, dessen Beanspruchung wir berechnen wollen. Je nach der Anzahl der Laufkrane und der Konstruktion ihrer Fahrgestelle erhalten auch die Nachbarrahmen gleichzeitig Einzellasten wie P_7, was sich im gegebenen Falle leicht berücksichtigen läßt.

Wir führen zur Abkürzung ein

$$\begin{cases} \eta_{r-1} - 2\eta_r + \eta_{r+1} = \Delta^2 \eta_r \\ \Sigma \eta_{r-1} - 2 \Sigma \eta_r + \Sigma \eta_{r+1} = \Delta^2 \Sigma \eta_r . \end{cases} \tag{65}$$

Die Kräfte P_1 bis P_4 erzeugen einen Widerstand W_r^r, der nach Gl. (64) beträgt:

$$\underset{(1-4)}{W_r^r} = - a \left[\frac{1}{\alpha v} + \Delta^2 \Sigma \eta_r \right] \sum_1^4 P_m K'_m .$$

P_5 am Ende der Stütze gibt $V_0 = - \frac{P}{2} \mu$. Mit $\mu = 1$ und $K = \frac{\alpha v}{2a}$ nach Gl. (53) S. 18 folgt:

$$\underset{(5)}{W_r^r} = - P_5 K a \left[\frac{1}{\alpha v} + \Delta^2 \Sigma \eta_r \right].$$

Durch P_6 entsteht $V_0 = 0$, also

$$\underset{(6)}{W_r^r} = - P_6 K a \Delta^2 \Sigma \eta_r .$$

Durch P_7 (Einzellast) entsteht gleichfalls $V_0 = 0$, also nach Gl. (63):

$$\underset{(7)}{W_r^r} = - P_7 K'_7 a \Delta^2 \eta_{rr} .$$

Digitized by Google

Im ganzen entsteht:

$$W_r' = -\alpha\left\{\left[\frac{1}{\alpha v}+\Delta^2\Sigma\eta_r\right]\left(\sum_1^4 P_m K_m' + P_5 K\right) + P_6 K\Delta^2\Sigma\eta_r + P_7 K_7'\Delta^2\eta_{rr}\right\}.$$

Am meisten gefährdet ist Rahmen 3. Nach S. 17 ist wegen $\Sigma\eta_3 = \Sigma\eta_4$

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\Sigma\eta_3 &= -2{,}0776 + 2\cdot 2{,}4430 - 2{,}4430 = +0{,}3654\\ \Delta^2\eta_{33} &= -0{,}4686 + 2\cdot 0{,}7689 - 0{,}5067 = +0{,}5625\end{aligned}\right\}\ \text{div. durch 1000.}$$

Es seien P_1 bis $P_4 = 2{,}2$ t; $P_5 = 1{,}1$ t; $P_6 = 1{,}0$ t; $P_7 = 6$ t.

Kurve II S. 23 liefert die Werte $\frac{\bar{c}}{v}$, die nach Gl. (49) und (51) S. 14 mit $K = 977$ multipliziert die Werte K' ergeben. Man findet

$$K_1' = 95,\quad K_2' = 235,\quad K_3' = 415,\quad K_4' = 640,\quad K_7' = 695,\quad K = 977.$$

Ferner ist $\frac{1}{\alpha v} = \frac{1}{1370\cdot 1{,}14} = 0{,}000\,64$, hierzu $+\Delta^2\Sigma\eta_r$

$= 0{,}000\,37$ gibt $0{,}001\,01$.

$$W_3' = -0{,}8\,[0{,}001\,01\,(2{,}2\cdot 1385 + 1{,}1\cdot 977) + 1{,}0\cdot 977\cdot 0{,}000\,365\,4 + 6{,}0\cdot 695\cdot 0{,}000\,562\,5]$$

$$= -0{,}8\,(4{,}163 + 0{,}357 + 2{,}34) = -5{,}48\ \text{t}.$$

Bei starrem Windverband würde der Auflagerdruck am oberen Stützenende betragen, vgl. Gl. (41):

$$P' = \frac{1}{v}\left(\sum_1^4 P\bar{c} + \frac{P_7}{2}\bar{c}_7 + P_5 + \frac{P_6}{2}\right),\ \text{und mittels Kurve II Abb. 27}$$

$$= 2{,}2\,(0{,}10 + 0{,}24 + 0{,}43 + 0{,}66) + 3{,}0\cdot 0{,}71 + 1{,}1 + 0{,}5 = 6{,}88\ \text{t}.$$

Das Moment an der Einspannungsstelle der freistehenden Stütze beträgt:

$$4\cdot 2{,}2\cdot 7{,}625 + \left(1{,}1 + \frac{1{,}0}{2}\right)14{,}75 + \frac{6{,}0}{2}\cdot 12{,}25 = 127{,}45\ \text{tm}.$$

Die elastische Stützung durch den Windverband vermindert das Moment um

$$5{,}48\cdot 14{,}75 = 81\ \text{tm},\quad \text{bleiben}\quad 46{,}4\ \text{tm}.$$

Bei starrer Stützung könnte man abziehen

$$6{,}88\cdot 14{,}75 = 101{,}48\ \text{tm},\quad \text{bleiben}\quad 26\ \text{tm}.$$

Das wirkliche Einspannungsmoment ist also weit größer. Es werde noch die Durchbiegung des Rahmens 3 unter der Wirkung von P am oberen Stützenende bestimmt und mit der des freistehenden Rahmens verglichen. Im ersten Falle ist die Durchbiegung

$$y = (P + W)\frac{h^3 v}{3EJ'};\quad \text{im zweiten: } y = \frac{Ph^3 v}{2\cdot 3EJ'},$$

es stellt also das Verhältnis $\frac{P}{2(P+W)}$ gewissermaßen den Wirkungsgrad des Windverbandes dar. Man findet:

$$P + W = P\left[1 - Ka\left(\frac{1}{\alpha v} + \Delta^2\eta_{rr}\right)\right]$$

$$= P[1 - 977\cdot 0{,}8\,(0{,}000\,64 + 0{,}000\,56)] = 0{,}064\,P,\quad \text{also}$$

$$\frac{P}{2(P+W)} = \frac{1}{0{,}128} = 7{,}8.$$

Digitized by Google

§ 6. Einfluß von Wärmeänderungen.

Unterschiede im Wärmezustande verschiedener Teile des Bauwerks haben Formänderungen im Gefolge, die wiederum Spannkräfte im Windverband und damit eine Änderung des Spannungszustandes der Stützen verursachen. Es werde angenommen, daß einer der (freiliegend gedachten) Gurte des Windverbandes und die zugehörigen Außengurte der Stützen Wärmeunterschiede $\pm \Delta t$ gegen die übrigen Stäbe des Tragwerks annehmen können. Das Bauwerk sei unbelastet, die statisch unbestimmten Größen $X_1, X_2 \ldots X_{n-1}$ werden mit dem Index t versehen.

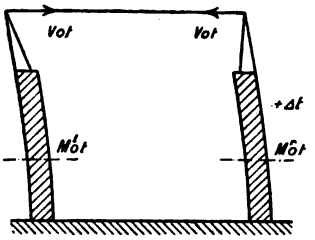

Abb. 30.

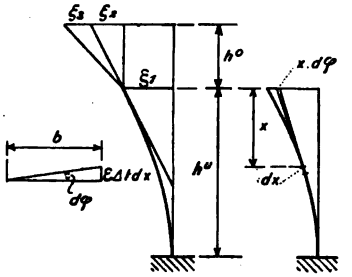

Abb. 32.

Abb. 31.

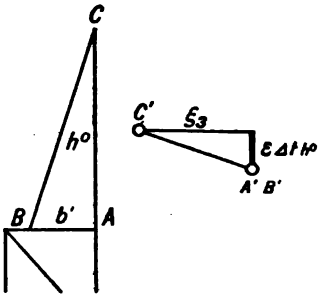

Abb. 33.

Sind alle $X = 0$, so verursachen die Wärmeänderungen $+\Delta t$ Verlängerungen der Gurtstäbe rechts um $\varepsilon \Delta t \lambda$, ferner entsteht durch die Krümmung der ungleichmäßig erwärmten Stütze im Querriegel die Spannkraft V_{0t}, die in den Stützen wiederum Momente M_{0t} zur Folge hat.

Zur Berechnung der Kraft V_{0t} betrachten wir die Formänderung der freien Stütze, vgl. Abb. 31. Es ist

$$\xi_1 = \int_0^{h^u} d\varphi \cdot x,$$

hierin

$$d\varphi = \frac{\varepsilon \Delta t}{b} dx,$$

mithin

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon \Delta t}{b} \int_0^{h^u} x\, dx = \frac{\varepsilon \Delta t}{b} \frac{h_u^2}{2}.$$

Der Drehungswinkel der Endtangente ist

$$\varphi = \int_0^{h^u} d\varphi = \frac{\varepsilon \Delta t h^u}{b},$$

hieraus

$$\xi_2 = \varphi h^0 = \varepsilon \Delta t \frac{h^u h^0}{b}.$$

Für ξ_3 liefert der Verschiebungsplan Abb. 33:

$$\frac{\xi_3}{h^0} = \frac{\varepsilon \Delta t h^0}{b'}; \quad \xi_3 = \frac{\varepsilon \Delta t h_0^2}{b'}.$$

Digitized by Google

Es ergibt sich also eine Gesamtverschiebung

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \varepsilon \Delta t \left(\frac{h_u^2}{2b} + \frac{h^0 h^u}{b} + \frac{h_0^2}{b'} \right) = \frac{\varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa, \tag{66}$$

worin

$$\varkappa = 1 + \left(\frac{h^0}{h} \right)^2 \left(\frac{2b}{b'} - 1 \right). \tag{67}$$

V_{0t} folgt nun aus der Bedingung: $\delta^l = \delta^r - \Delta l$, worin

$$\delta^l = \frac{V_{0t} h^3 v}{3EJ'}$$

$$\delta^r = \frac{\varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa - \frac{V_{0t} h^3 v}{3EJ'}$$

$$\Delta l = \frac{V_{0t} l}{EF^v}.$$

Die Auflösung nach V_{0t} liefert

$$V_{0t} = \frac{3}{4} \frac{EJ' \varepsilon \Delta t}{bh} \cdot \frac{\varkappa \mu}{v}. \tag{68}$$

Durch V_{0t} ist das statisch unbestimmte Hauptsystem berechnet, da sich die Momente M_{0t} und Drehungen der Einspannungsquerschnitte τ_{0t} hieraus ergeben.

Wir wenden nun die Arbeitsgleichung

$$\Sigma \bar{Q} c = \Sigma \bar{S} \Delta s + \int \bar{M} d\varphi$$

an auf den Belastungszustand $X_r = -1$ und den wirklichen Verschiebungszustand im unbelasteten, nur der Wirkung der Wärmeänderungen ausgesetzten Bauwerk. Die Werte $\bar{Q}$, $\bar{S}$, $\bar{M}$ sind in den Gleichungen (7), (8) und (9) S. 4 zusammengestellt. Für die Formänderungen der während des Zustandes $X_r = -1$ gespannten Stäbe und Stützen gilt:

$$\begin{cases} \text{für } X_r: & \Delta s_t = \dfrac{+ X_{rt} \lambda}{EF^w} + \varepsilon \Delta t \lambda \\ \text{» } L_{(r+1)}: & \Delta s_t = \dfrac{- X_{rt} \lambda}{EF^w} \\ \text{» } D_r: & \Delta s_t = \dfrac{1}{\cos \varphi} (- X_{rt} + X_{(r-1)t}) \dfrac{d}{EF^d}, \quad \text{ähnlich } D_{r+1} \\ \text{» } V_{(r-1)}: & \Delta s_t = (V_{(r-1)0t} - a_\mu X_{(r-2)t} + a_\mu X_{rt}) \dfrac{l}{EF^v}, \end{cases} \tag{69}$$

ähnlich $V_{(r+1)}$, und für die Drehungen der Stützenquerschnitte:

$$\begin{cases} d\varphi^l_{(r-1)t} = \dfrac{dx}{EJ} [M^l_{(r-1)0t} - X_{(r-2)t}(a_\mu' x) - X_{(r-1)t}(-2ax) - X_{rt}(a_\mu x)] \\ d\varphi^r_{(r-1)t} = \dfrac{dx}{EJ} [M^r_{(r-1)0t} - X_{(r-2)t}(-a_\mu x) - X_{(r-1)t}(+2ax) - X_{rt}(-a_\mu' x)] \\ \qquad\qquad - \dfrac{\varepsilon \Delta t dx}{b}, \end{cases} \tag{70}$$

ähnliches erhält man für Rahmen r und $r+1$.

Für die Drehungen der Einspannungsquerschnitte findet man nach Gl. (13) S. 5:

$$\tau^l_{(r-1)t} = \tau^l_{(r-1)0t} - X_{(r-2)t}(+ a_\mu' \tau) - X_{(r-1)t}(-2a\tau) - X_{rt}(+ a_\mu \tau)$$

usw.

Digitized by Google

In der neuen Arbeitsgleichung sind also im Vergleich zur früher abgeleiteten die statisch unbestimmten Größen X durch die besonderen Werte X_t ersetzt worden, in den Gliedern des statisch unbestimmten Hauptsystems die S_0, M_0 durch S_{0t}, M_{0t}, in den direkt erwärmten Stäben sind die Glieder mit $\varepsilon \Delta t$ hinzugekommen, wobei zu beachten ist, daß die Wirkung eines positiven Δt, d. h. Erwärmung des Außengurts der Stütze, einem negativen M entspricht, daher

$$d\varphi_t = + \frac{M_t ds}{EJ} - \frac{\varepsilon \Delta t ds}{b}. \tag{71}$$

Die linke Seite der Normalgleichung ändert sich nicht. Rechts kommen hinzu, mit EJ' multipliziert:

$$- EJ' \varepsilon \Delta t \lambda + EJ' a \mu' \varepsilon \Delta t \int_0^h \frac{x dx}{b} - EJ' 2a \varepsilon \Delta t \int_0^h \frac{x dx}{b} + EJ' a \mu \varepsilon \Delta t \int_0^h \frac{x dx}{b}.$$

Wie leicht ersichtlich, ist $\varepsilon \Delta t \int_0^h \frac{x dx}{b} =$ der freien Ausbiegung des Stützenendes, $= \frac{\varepsilon \Delta t h^2 \varkappa}{2b}$. Setzt man dies ein, so lautet der Zuwachs der rechten Seite der Gleichung:

$$+ EJ' \varepsilon \Delta t \lambda - \frac{EJ' \varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa (a\mu' - 2a + a\mu)^{1}). \tag{72}$$

Das zweite Glied ist in den Normalgleichungen mit $\mu = \mu' = 1$ gleich Null, nur in den beiden Endgleichungen nicht.

Für $X = 0$ sind alle Rahmen in gleichem Spannungszustande. Es ist nun

$$M_0^l = - V_{0t} \cdot x \quad = M_0^r$$
$$\tau_0^l = - V_{0t} \cdot h\tau = \tau_0^r.$$

Ferner ist leicht ersichtlich, daß das Glied von N_r:

$$+ EJ' ah [- \mu \tau^l_{(r-1)0t} + \mu' \tau^r_{(r-1)0t} - \mu' \tau^l_{(r+1)0t} + \mu \tau^r_{(r+1)0t} + 2 (\tau^l_{r0t} - \tau^r_{r0t})],$$

wegen $\tau^l_{(r-1)0t} = \tau^l_{r0t} = \tau^l_{(r+1)0t}$,

und $\tau^r_{(r-1)0t} = \tau^r_{r0t} = \tau^r_{(r+1)0t}$,

und $\mu + \mu' = 2$

$= 0$ ist, ebenso das Glied

$$- aJ' \left[+ \mu \int M^l_{(r-1)0t} \frac{x dx}{J} - \mu' \int M^r_{(r-1)0t} \frac{x dx}{J} + - \cdots \right]$$

aus dem gleichen Grunde, so daß nur übrig bleibt:

$$N_r = + EJ' \varepsilon \Delta t \lambda. \tag{73}$$

Bei der ersten Elastizitätsgleichung (Gl. 22) S. 7 kommt hinzu:

$$+ EJ' \varepsilon \Delta t \lambda + 2aEJ' \frac{\varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa - a\mu EJ' \frac{\varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa.$$

Setzt man $\mu = \mu' = 1$, so verschwinden in Gl. (22) für unseren Zustand die Glieder mit τ_0 und M_0, und es bleibt

$$N_1 = - a\mu e k^o V_{0t} + EJ' \varepsilon \Delta t \lambda + \frac{EJ' a \varepsilon \Delta t h^2}{2b} \varkappa.$$

---

[1]) Die Belastungsglieder in Gl. (14) sind nach der anderen Seite gebracht worden.

Digitized by Google

Nach Gl. (68) war $V_{0t} = -\frac{3}{4}\frac{EJ'\varepsilon \Delta t}{bh}\frac{\varkappa\mu}{v}$, dies in N_1 eingesetzt, gibt mit $\mu = 1$:

$$N_1 = EJ'\varepsilon \Delta t \lambda \left[1 + \frac{a^2\varkappa}{2b}\left(\frac{3k^v}{hv} + \frac{2h^2}{e}\right)\right]. \tag{74}$$

Für die statisch nicht bestimmbaren Größen gilt nach Gl. (27):

$$X_i = \beta_{i1} N_1 + \beta_{i2} N_2 + \cdots \beta_{i(n-1)} N_{(n-1)}.$$

In unserem Falle ist

$$N_2 = N_3 = \cdots = N_{n-2};\quad N_1 = N_{(n-1)};\ \text{also}$$

$$X_{it} = EJ'\varepsilon \Delta t \lambda \left\{\sum_{r=n-2}^{r=2} \beta_{ir} + \left[1 + \frac{a^2\varkappa}{2b}\left(\frac{3k^v}{hv} + \frac{2h^2}{e}\right)\right](\beta_{i1} + \beta_{i(n-1)})\right\}. \tag{75}$$

Sind auch die Endrahmen elastisch, so werden auch N_1 und N_{n-1} gleich den übrigen, und es folgt:

$$X_{it} = EJ'\varepsilon \Delta t \lambda \Sigma \beta_i. \tag{76}$$

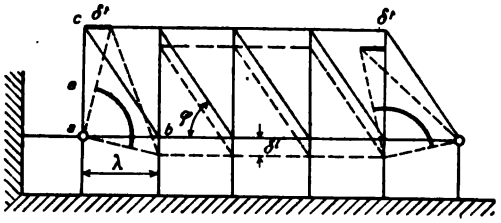

Abb. 34.

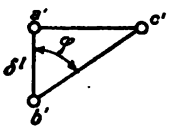

Abb. 35.

Aus dem Verschiebungsplan für Zustand Δt, $X = 0$, Abb. 34 lassen sich die Werte

$$N_1 = \delta_{01t} \text{ und } N_{n-1} = \delta_{0(n-1)t}$$

folgendermaßen ableiten:

Die Verschiebung der Zwischenrahmen ist $\delta^1 = \frac{V_{0t}h^3}{3EJ'} \cdot v$ und nach Einsetzen von V_{0t}:

$$\delta^1 = \frac{\varepsilon \Delta t h^2}{4b}\varkappa.$$

Da Punkt c durch die Stäbe ac und bc mit den Punkten a und b verbunden ist, deren Verschiebungen bekannt sind, so folgt aus Abb. 35:

$$a'c' = \delta^1 \operatorname{tg}\varphi = 2a\delta^1 = \frac{\varepsilon \Delta t a h^2}{2b}\varkappa,$$

und es wird:

$$\delta_{10t} = \varepsilon \Delta t \lambda + \frac{\varepsilon \Delta t a h^2}{2b}\varkappa,$$

was sich mit Beachtung von $2a = \frac{e}{\lambda}$ umformen läßt in

$$\delta_{10t} = \varepsilon \Delta t \lambda \left(1 + \frac{a^2h^2}{be}\varkappa\right). \tag{77}$$

Dieser Wert entspricht dem in Gl. (74) gefundenen, wenn man das gegenüber $\frac{2h^2}{e}$ geringfügige Glied $\frac{3k^v}{hv}$ streicht. Es ist also

$$N_1 = N_{n-1} = EJ'\varepsilon \Delta t \lambda \left(1 + \frac{a^2h^2}{be}\varkappa\right). \tag{78}$$

Digitized by Google

In unserem Zahlenbeispiel ergibt sich mit

$$b = 1{,}00\text{ m},\quad b' = 0{,}80\text{ m},\quad \frac{b}{b'} = 1{,}25,\quad \frac{h^0}{h} = 0{,}203,$$

$$\varkappa = 1 + 0{,}041 \cdot 1{,}50 = 1{,}06.$$

$$1 + \frac{a^2 h^2}{be}\varkappa = 1 + \frac{0{,}64 \cdot 218 \cdot 1{,}06}{1 \cdot 16} = 9{,}72.$$

$$EJ'\varepsilon \Delta t \lambda = 112000 \cdot 0{,}000012 \cdot \Delta t \cdot 10 = 13{,}44\,\Delta t.$$

$$N_1 = N_{n-1} = 13{,}44 \cdot 9{,}72\,\Delta t = 130{,}5\,\Delta t.$$

Man erhält also nach Gl. (75) für die statisch unbestimmten Größen:

$$X_{1t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0045206 - 9{,}72 \cdot 0{,}0012968) = -0{,}230\,\Delta t,$$
$$X_{2t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0082249 - 9{,}72 \cdot 0{,}0020776) = -0{,}382\,\Delta t,$$
$$X_{3t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0102744 - 9{,}72 \cdot 0{,}0024430) = -0{,}457\,\Delta t.$$

Das negative Vorzeichen dieser Gurtkräfte erklärt sich aus Abb. 34, wonach sowohl die Längenänderungen der Gurtstäbe als auch die Formänderungen der Rahmen auf Annäherung der Schnittflächen hinwirken.

Bei elastischen Endrahmen muß sich natürlich der Einfluß der Wärmeänderung weit weniger wirksam erweisen. Man findet nach Gl. (76) mit Hilfe der Ergebnisse von Seite 19:

$$X_{1t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0018010) = -0{,}024\,\Delta t,$$
$$X_{2t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0038127) = -0{,}051\,\Delta t,$$
$$X_{3t} = 13{,}44\,\Delta t\,(-0{,}0050699) = -0{,}068\,\Delta t.$$

Es entsteht nun durch Wärmeänderung um Δt^0 ein Rahmen 3:

$$W_3^r = V_{0t} - a\,(X_2 - 2X_3 + X_4),$$
$$= -EJ'\varepsilon\Delta t\left(\frac{3}{4}\frac{\varkappa}{vbh} + a\lambda\,[-0{,}0284 + 2 \cdot 0{,}0340 - 0{,}0340]\right),$$
$$= -EJ'\varepsilon\Delta t\left(\frac{3}{4}\frac{\varkappa}{vbh} + a\lambda \cdot 0{,}0056\right).$$

Es sind hierbei die Klammerwerte der Gleichungen für X benutzt worden. Mit den Zahlen des Beispiels erhält man:

$$W_3^r = -1{,}344\,\Delta t\left(\frac{0{,}75 \cdot 1{,}06}{1{,}14 \cdot 1{,}0 \cdot 14{,}75} + 0{,}8 \cdot 10 \cdot 0{,}0056\right) = -0{,}124\,\Delta t.$$

Erwärmt sich also die rechte Hallenseite um $\Delta t = 10^o$, so entsteht $W_3^r = -1{,}24$ t und ein Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_3^r = +1{,}24 \cdot 14{,}75 = +18{,}3$ tm.

Bei $\Delta t = -10^o$ wird daher $\mathfrak{M}_{3t}^r = -18{,}3$ tm, was zu dem Seite 25 erhaltenen Ergebnis von $-46{,}4$ tm noch hinzugefügt werden müßte, so daß sich ein Gesamtmoment von 65 tm ergibt.

Digitized by Google

II. Abschnitt.

§ 7. Der Balken auf zwei Stützen mit stetiger elastischer Zwischenstützung.

Zu einer anderen Lösung der Aufgabe gelangt man, wenn man den Windverband als einen Balken mit konstantem Trägheitsmoment $J_b = F^w \frac{e^2}{2}$ betrachtet, der in den Endpunkten starr, in den Zwischenpunkten durch die Rahmen elastisch gestützt ist. Hierbei wird die Gliederung des Verbandes außer acht gelassen, was eine im Verhältnis zur Länge geringe Breite e voraussetzt, um zulässig zu sein. Dies trifft besonders dann zu, wenn der Verband sich nur über einen Teil der Hallenbreite erstreckt. Die Lasten P sollen zunächst nur in der Ebene des Windträgers angreifen. Ersetzt man die am Windverbande wirkenden Widerstandskräfte

$$P^w = W^l - W^r \quad \text{(I 58)}$$

durch gleichmäßig verteilte Lasten von der Höhe

(1) $$z = \frac{W^l - W^r}{\lambda}$$

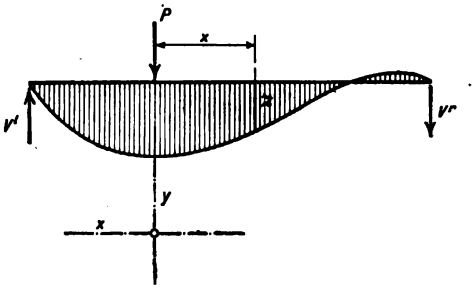

Abb. 36.

und nimmt die Feldweiten unendlich klein an, so liegt der in Fig. 36 dargestellte Belastungsfall vor.

Da an jeder Stelle des Trägers der Widerstand proportional der Durchbiegung ist, so gilt

(2) $$z = E_0 y,$$

wo E_0 eine Elastizitätsziffer bedeutet, die durch Konstruktion und Abstand der Rahmen gegeben ist. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

(3) $$EJ_b \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

und der Differentialgleichung der Momentenlinie

(4) $$\frac{d^2M}{dx^2} = z = E_0 y$$

folgt

$$EJ_b \frac{d^4y}{dx^4} = -E_0 y,$$

wofür man schreibt:

(5) $$\frac{s^4}{4}\frac{d^4y}{dx^4} = -y,$$

wenn

(6) $$s^4 = 4\frac{E}{E_0} J_b$$

bedeutet. Da Gleichung (4) voraussetzt, daß auf dem betrachteten Trägerstücke nur die z-Belastung wirkt, so muß man die y-Achse mit der Einzellast P zusammenfallen lassen. Mit der Bezeichnung

(7) $$\frac{x}{s} = \varphi$$

Digitized by Google

erhält man als Lösung der Differentialgleichung

$$y = (A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi}) \cos\varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi}) \sin\varphi, \tag{8}$$

woraus sich die nachstehenden Ableitungen bilden lassen:

$$s\frac{dy}{dx} = +(A_1 e^{\varphi} - A_2 e^{-\varphi})\cos\varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi})\cos\varphi - (A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi})\sin\varphi + (B_1 e^{\varphi} - B_2 e^{-\varphi})\sin\varphi, \tag{9}$$

$$\frac{s^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = -(A_1 e^{\varphi} - A_2 e^{-\varphi})\sin\varphi + (B_1 e^{\varphi} - B_2 e^{-\varphi})\cos\varphi, \tag{10}$$

$$\frac{s^3}{2}\frac{d^3y}{dx^3} = -(A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi})\sin\varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi})\cos\varphi - (A_1 e^{\varphi} - A_2 e^{-\varphi})\cos\varphi - (B_1 e^{\varphi} - B_2 e^{-\varphi})\sin\varphi. \tag{11}$$

Für das Moment an der Stelle x gilt:

$$M = -EJ_b\frac{d^2y}{dx^2} = -E_0\frac{s^2}{2}\cdot\frac{s^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{12}$$

und für die Querkraft:

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EJ_b\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{E_0 s}{2}\cdot\frac{s^3}{2}\frac{d^3y}{dx^3}. \tag{13}$$

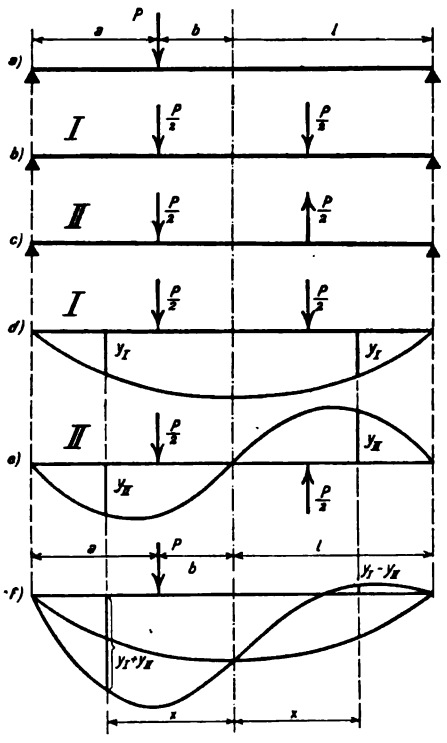

Abb. 37.

Die Konstanten $A_1 A_2 B_1 B_2$ ergeben sich für beide Zweige verschieden, es sind also für jeden Belastungszustand nach Fig. 36 acht zu bestimmen. Die Bestimmungsgleichungen hierfür drücken aus, daß an den Trägerenden $y = 0$ und $M = 0$ sein muß, ferner für $x = 0$ sich y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ für beide Zweige gleich groß ergeben müssen, endlich der Unterschied der Querkräfte an dieser Stelle $= P$ sein muß.

Es ist nun zweckmäßig, den gegebenen Belastungszustand durch die beiden Teilzustände I und II zu ersetzen, deren Addition wieder den gegebenen liefert, Abb. 37. Zustand I liefert die symmetrische Biegungslinie Abb. 37 d, Zustand II die antisymmetrische (e), die beide nur für eine Trägerhälfte bestimmt zu werden brauchen, so daß sich die wirkliche Gestalt der elastischen Linie ergibt, wenn man für die linke Trägerhälfte $y = y_I + y_{II}$, für die rechte Trägerhälfte $y = y_I - y_{II}$ bildet. Es sei l die halbe Trägerlänge, $a + b = l$ bestimmen die Lage der Last. Die Konstanten des Teilbelastungszustandes I seien

für die äußeren Zweige a: A_1 A_2 B_1 B_2,
und für die inneren Zweige b: A_1' A_2' B_1' B_2';

und beim Zustande II

für die äußeren Zweige a: C_1 C_2 D_1 D_2,
und für die inneren Zweige b: C_1' C_2' D_1' D_2'.

Digitized by Google

§ 8. Konstanten der Teilbelastungszustände I und II.

Abb. 38 zeigt für Zustand I (P in a, b) die elastische Linie, die M- und Q-Linie und das Koordinatensystem, dessen Y-Achse für jede Trägerhälfte mit der Last zusammenfällt. Die Abszissen werden nach den Trägerenden hin positiv, nach der Mitte negativ gezählt, sie werden mit x und x', die dazu gehörigen Durchbiegungen mit y und y' bezeichnet. Im Punkte L ist

$$y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad x = a.$$

Nennt man

$$\varphi_{(a)} = \frac{a}{s} = \alpha', \tag{14}$$

so erhält man aus den Gl. (8) und (10):

$$(A_1 e^{\alpha'} + A_2 e^{-\alpha'}) \cos \alpha' + (B_1 e^{\alpha'} + B_2 e^{-\alpha'}) \sin \alpha' = 0,$$
$$-(A_1 e^{\alpha'} - A_2 e^{-\alpha'}) \sin \alpha' + (B_1 e^{\alpha'} - B_2 e^{-\alpha'}) \cos \alpha' = 0.$$

Drückt man die A durch die B aus, so erhält man hieraus:

$$\begin{cases} A_2 = -\dfrac{B_1 e^{\alpha}}{\sin \alpha} + B_2 \operatorname{cotg} \alpha, \\ A_1 = \quad B_1 \operatorname{cotg} \alpha - \dfrac{B_2 e^{-\alpha}}{\sin \alpha}, \end{cases} \tag{15}$$

wobei

$$2\alpha' = \alpha \tag{16}$$

gesetzt wurde. In Trägermitte ist

$$x' = b, \ \varphi'_{(b)} = \frac{b}{s} = \beta'; \ \frac{dy'}{dx'} = 0, \ \frac{d^3y'}{dx'^3} = 0.$$

Bei der Zahlenrechnung ist also b mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

Setzt man in die Gleichungen (9) und (11) β' ein und die Gleichungen selbst gleich Null, addiert und subtrahiert sie dann, so folgen zwei neue Gleichungen:

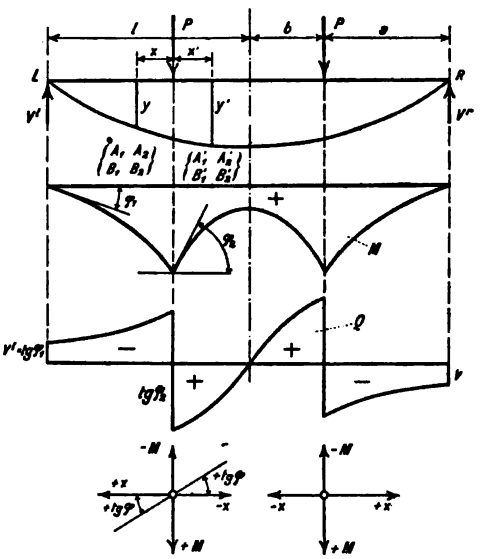

Abb. 38.

$$-(A'_1 e^{\beta'} + A'_2 e^{-\beta'}) \sin \beta' + (B'_1 e^{\beta'} + B'_2 e^{-\beta'}) \cos \beta' = 0,$$
$$+(A'_1 e^{\beta'} - A'_2 e^{-\beta'}) \cos \beta' + (B'_1 e^{\beta'} - B'_2 e^{-\beta'}) \sin \beta' = 0,$$

woraus man, mit

$$2\beta' = \beta \tag{17}$$

erhält:

$$\begin{cases} A'_1 = B'_1 \operatorname{cotg} \beta + \dfrac{B'_2 e}{\sin \beta}, \\ A'_2 = \dfrac{B'_1 e^{-\beta}}{\sin \beta} + B'_2 \operatorname{cotg} \beta. \end{cases} \tag{18}$$

Digitized by Google

Vier weitere Gleichungen ergeben sich aus den Bedingungen für den Lastangriffspunkt. Dort ist

$$x = 0, \quad x' = 0, \quad \varphi_{(x)} = 0, \quad \varphi'_{(x')} = 0;$$

ferner

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2},$$

endlich ist nach (Abb. 38):

$$Q_{\text{für } +x=0} - Q_{\text{für } -x=0} = -P, \tag{19}$$

wofür man auch wegen Gl. (13) schreiben kann:

$$\frac{s^3}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right) = \frac{2P}{E_0 s},$$

so daß man folgende 4 Gleichungen erhält:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(20) aus } y = y': & A_1 + A_2 = A_1' + A_2', \\ \text{(21) aus } \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}: & A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = A_1' - A_2' + B_1' + B_2', \\ \text{(22) aus } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}: & B_1 - B_2 = B_1' - B_2', \\ \text{(23) aus } Q - Q' = -P: & B_1 + B_2 - (A_1 - A_2) - (B_1' + B_2') + A_1' - A_2' = +\frac{2P}{E_0 s}. \end{array}\right.$$

Bildet man aus (20): $A_1 - A_1' = -(A_2 - A_2')$,

aus (22): $B_1 - B_1' = B_2 - B_2'$

und setzt dies in (21) und (23) ein, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen hervorgeht:

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 - B_1' = \frac{P}{2E_0 s}, \\ A_1 - A_1' = \frac{-P}{2E_0 s}. \end{array}\right. \tag{24}$$

Ersetzt man hierin die A-Werte durch die B-Werte nach den Formeln (15) und (18), so erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für B_1 und B_2:

$$\left\{\begin{array}{l} B_1(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) - B_2\left(\frac{e^{-\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{e^{-\beta}}{\sin\beta}\right) = \frac{-P}{2E_0 s}\left(1 + \operatorname{cotg}\beta + \frac{e^{-\beta}}{\sin\beta}\right), \\ B_1\left(\frac{e^{\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{e^{\beta}}{\sin\beta}\right) - B_2(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) = \frac{-P}{2E_0 s}\left(1 - \operatorname{cotg}\beta - \frac{e^{\beta}}{\sin\beta}\right). \end{array}\right. \tag{25}$$

Die Auflösung liefert, wenn man einführt:

$$\alpha - \beta = \gamma, \quad \text{wobei } \gamma = \frac{2a}{s} - \frac{2b}{s} = \frac{2l}{s}, \tag{26}$$

ferner:

$$\left\{\begin{array}{l} a' = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ b' = \sin\beta + \cos\beta, \\ a'' = \sin\alpha - \cos\alpha, \\ b'' = \sin\beta - \cos\beta, \end{array}\right. \tag{27}$$

Digitized by Google

olgende Formeln:

$$B_1 = \frac{-P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma - \cos\gamma - e^{-\gamma} + a'' e^{-\beta} + b'' e^{-\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma},$$

$$B_2 = \frac{+P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma + \cos\gamma + e^{\gamma} + a' e^{\beta} + b' e^{\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma}.$$

28) Ähnliche Ausdrücke erhält man für A_1 und A_2 aus der Gl. (15):

$$A_1 = \frac{-P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma + \cos\gamma + e^{-\gamma} + a' e^{-\beta} + b' e^{-\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma},$$

$$A_2 = \frac{+P}{4E_0 s} \cdot \frac{\cos\gamma - \sin\gamma + e^{\gamma} - a'' e^{\beta} - b'' e^{\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma}.$$

Nun liefern die Gleichungen (24) und (22) die Konstanten B_1' und B_2' und (24) und 20) geben A_1' und A_2'. Es ist:

(29)
$$A_1' = \frac{P}{4E_0 s} \cdot \frac{\cos\gamma - \sin\gamma + e^{\gamma} - a' e^{-\beta} - b' e^{-\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma},$$

$$A_2' = \frac{-P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma + \cos\gamma + e^{-\gamma} + a'' e^{\beta} + b'' e^{\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma},$$

$$B_1' = \frac{-P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma + \cos\gamma + e^{\gamma} + a'' e^{-\beta} + b'' e^{-\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma},$$

$$B_2' = \frac{+P}{4E_0 s} \cdot \frac{\sin\gamma - \cos\gamma - e^{-\gamma} + a' e^{\beta} + b' e^{\alpha}}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma}.$$

Ist $a = l$, $b = 0$, so steht die Last $2P$ in der Mitte. Mit den inneren Zweigen verschwinden die negativen Abszissen, und es wird, wenn man zur Abkürzung c' und c'' einführt:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = 0,$$
$$a' = \sin\gamma + \cos\gamma = c', \quad e^{\alpha} = e^{\gamma},$$
$$b' = 1, \quad e^{-\alpha} = e^{-\gamma},$$
$$a'' = \sin\gamma - \cos\gamma = c'', \quad e^{\beta} = 1,$$
$$b'' = -1. \quad e^{-\beta} = 1.$$

(28a) und (29a)
$$\begin{cases} A_1 = -2K'(c' + e^{-\gamma}), \\ A_2 = -2K'(c'' - e^{\gamma}), \\ A_1' = +2K'(\mathfrak{Sin}\,\gamma - \sin\gamma), \\ A_2' = +2K'(\mathfrak{Sin}\,\gamma - \sin\gamma). \end{cases} \qquad \begin{cases} B_1 = -2K'(c'' - e^{-\gamma}), \\ B_2 = +2K'(c' + e^{\gamma}), \\ B_1' = -2K'(\mathfrak{Sin}\,\gamma + \sin\gamma), \\ B_2' = +2K'(\mathfrak{Sin}\,\gamma + \sin\gamma). \end{cases}$$

worin

(30)
$$K' = \frac{P}{4E_0 s(\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma)}.$$

Abb. 39 zeigt für Teilbelastungszustand II die elastische Linie, ferner die M- und Q-Linie. Die Bedingung

$$y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

für Punkt L liefert wie Seite 33:

(31)
$$C_1 = D_1 \operatorname{cotg}\alpha - \frac{D_2 e^{-\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$C_2 = D_2 \operatorname{cotg}\alpha - \frac{D_1 e^{\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Digitized by Google

In Trägermitte ist[1])

$$x' = b, \quad \varphi'_b = \frac{b}{s} = \beta', \quad y' = 0, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0;$$

worauf man in derselben Weise wie für Zustand I erhält:

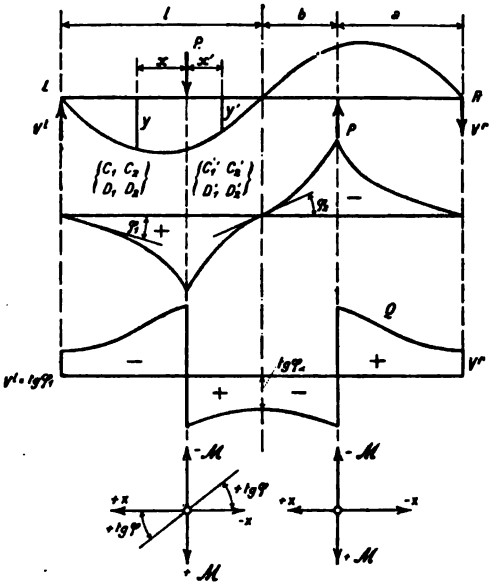

Abb. 39.

$$(32)\quad \begin{cases} C_1 = D_1 \operatorname{cotg}\beta - \dfrac{D_2 e^{-\beta}}{\sin\beta}, \\ C_2 = D_2 \operatorname{cotg}\beta - \dfrac{D_1 e^{\beta}}{\sin\beta}. \end{cases}$$

Aus den Bedingungen für den Last angriffspunkt erhält man:

$$y = y'; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2};$$

ferner wegen

$$Q_{\text{für } +x=0} - Q_{\text{für } -x=0} = -P:$$

$$\frac{s^3}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right) = \frac{2P}{E_0 s},$$

so daß sich folgende vier Gleichungen ergeben:

$$(33)\quad C_1 + C_2 = C'_1 + C'_2,$$

$$(34)\quad C_1 - C_2 + D_1 + D_2 = C'_1 - C'_2 + D'_1 + D'_2$$

$$(35)\quad D_1 - D_2 = D'_1 - D'_2,$$

$$(36)\quad D_1 + D_2 - (C_1 - C_2) - (D'_1 + D'_2) + C'_1 - C'_2 = \frac{2P}{E_0 s}.$$

Auf demselben Wege wie bei Zustand I bildet man zunächst hieraus folgend zwei Bestimmungsgleichungen für D_1 und D_2:

$$(37)\quad \begin{cases} D_1(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) - D_2\left(\dfrac{e^{-\alpha}}{\sin\alpha} - \dfrac{e^{-\beta}}{\sin\beta}\right) = -\dfrac{P}{2E_0 s}\left(1 + \operatorname{cotg}\beta - \dfrac{e^{-\beta}}{\sin\beta}\right), \\ D_1\left(\dfrac{e^{\alpha}}{\sin\alpha} - \dfrac{e^{\beta}}{\sin\beta}\right) - D_2(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) = -\dfrac{P}{2E_0 s}\left(1 - \operatorname{cotg}\beta + \dfrac{e^{\beta}}{\sin\beta}\right). \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$D_1 = +\frac{P}{4E_0 s} \cdot \frac{\cos\gamma - \sin\gamma + a''e^{-\beta} - b''e^{-\alpha} - e^{\gamma}}{\cos\gamma - \mathfrak{Cof}\gamma},$$

oder wenn

$$\frac{P}{4E_0 s} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}\gamma - \cos\gamma} = K''$$

eingeführt wird:

$$(38)\quad \begin{cases} D_1 = \quad K''(\sin\gamma - \cos\gamma + e^{-\gamma} - a''e^{-\beta} + b''e^{-\alpha}), \\ D_2 = -K''(\sin\gamma + \cos\gamma - e^{\gamma} \quad - a'e^{\beta} \quad + b'e^{\alpha}), \end{cases}$$

Ähnliche Ausdrücke erhält man für C_1 und C_2 aus (31):

$$\begin{cases} C_1 = +K''(\sin\gamma + \cos\gamma - e^{-\gamma} - a'e^{-\beta} + b'e^{-\alpha}), \\ C_2 = +K''(\sin\gamma - \cos\gamma + e^{\gamma} \quad - a''e^{\beta} \quad + b''e^{\alpha}). \end{cases}$$

[1]) In Abb. 39 sind bei dem Koordinatensystem für die rechte Trägerhälfte die Vorzeichen von x umzukehren, entsprechend Abb. 38.

Digitized by Google

Auf demselben Wege wie für Zustand I erhält man auch hier die Konstanten für die inneren Zweige.

(39)
$$\begin{cases} C_1' = & K''(\sin\gamma - \cos\gamma + e^{\gamma} & - a'e^{-\beta} + b'e^{-\alpha}), \\ C_2' = & K''(\sin\gamma + \cos\gamma - e^{-\gamma} - a''e^{\beta} & + b''e^{\alpha}), \\ D_1' = & K''(\sin\gamma + \cos\gamma - e^{\gamma} & - a''e^{-\beta} + b''e^{-\alpha}), \\ D_2' = & -K''(\sin\gamma - \cos\gamma + e^{-\gamma} - a'e^{\beta} & + b'e^{\alpha}). \end{cases}$$

Durch diese zweimal acht Konstanten sind die Belastungszustände I und II völlig bestimmt.

§ 9. Konstanten des wirklichen Belastungszustandes.

Nach Seite 32 erhalten wir für den wirklichen Belastungszustand Abb. 37a, f die Ordinaten der elastischen Linie und ebenso die aus den Ableitungen entstehenden Werte M, Q, wenn wir die Zustände I und II für die linke Trägerhälfte addieren, für die rechte voneinander subtrahieren. Hierzu bilde man folgende neue Konstanten:

Linke Trägerhälfte

äußerer Zweig a:	innerer Zweig b:
$E_1 = A_1 + C_1$,	$E_1' = A_1' + C_1'$,
$E_2 = A_2 + C_2$,	$E_2' = A_2' + C_2'$,
$F_1 = B_1 + D_1$,	$F_1' = B_1' + D_1'$,
$F_2 = B_2 + D_2$,	$F_2' = B_2' + D_2'$.

Rechte Trägerhälfte.

äußerer Zweig a:	innerer Zweig b:
$G_1 = A_1 - C_1$,	$G_1' = A_1' - C_1'$,
$G_2 = A_2 - C_2$,	$G_2' = A_2' - C_2'$,
$H_1 = B_1 - D_1$,	$H_1' = B_1' - D_1'$,
$H_2 = B_2 - D_2$,	$H_2' = B_2' - D_2'$.

Mit

$$K = \frac{P}{4E_0 s} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma}$$

ergeben sich folgende Konstanten des allgemeinen Belastungsfalles, wobei schon durch 2 dividiert worden ist, um die durch Zusammensetzung von Zustand I und II entstehende Einzellast $2P$ auf P zu reduzieren:

(40)
$$\begin{cases} E_1 = & c'\cos\gamma - e^{-\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a'e^{-\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b'e^{-\alpha}\cos\gamma, \\ E_2 = & c''\cos\gamma + e^{\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a''e^{\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b''e^{\alpha}\cos\gamma, \\ F_1 = & c''\cos\gamma + e^{-\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a''e^{-\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b''e^{-\alpha}\cos\gamma, \\ F_2 = & -c'\cos\gamma + e^{\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a'e^{\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - b'e^{\alpha}\cos\gamma, \end{cases}$$

(41)
$$\begin{cases} E_1' = & c''\cos\gamma + e^{\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a'e^{-\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b'e^{-\alpha}\cos\gamma, \\ E_2' = & c'\cos\gamma - e^{-\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a''e^{\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b''e^{\alpha}\cos\gamma, \\ F_1' = & c'\cos\gamma - e^{\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - a''e^{-\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + b''e^{-\alpha}\cos\gamma, \\ F_2' = & -c''\cos\gamma - e^{-\gamma}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + a'e^{\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - b'e^{\alpha}\cos\gamma. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(42)\quad \begin{cases} G_1 = G_1' = -c'\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + e^{-\gamma}\cos\gamma + a' e^{-\beta}\cos\gamma - b' e^{-\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma, \\ G_2 = G_2' = -c''\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - e^{\gamma}\cos\gamma + a'' e^{\beta}\cos\gamma - b'' e^{\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma, \\ H_1 = H_1' = -c''\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - e^{-\gamma}\cos\gamma + a'' e^{-\beta}\cos\gamma - b'' e^{-\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma, \\ H_2 = H_2' = +c'\,\mathfrak{Cof}\,\gamma - e^{\gamma}\cos\gamma - a' e^{\beta}\cos\gamma + b' e^{\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma. \end{cases}$$

Der Faktor K ist überall weggelassen worden.

Mit der Bestimmung der Konstanten ist die Aufgabe gelöst. Für die Momente gilt nach Gl. (12) S. 32:

$$M = -E_0 \frac{s^2}{2} \cdot \frac{s^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Wir multiplizieren den Faktor K der Konstanten mit $E_0 \frac{s^2}{2}$ und erhalten

$$\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)};$$

die in den folgenden Formeln vorkommenden Größen $EFGH$ sind dann durch die Gl. 40 bis 42 unmittelbar gegeben. Man findet für die Momente:

linke Trägerhälfte

$$(43)\quad \begin{cases} \text{äußerer Zweig: } M = \dfrac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}[(E_1 e^{\varphi} - E_2 e^{-\varphi})\sin\varphi - (F_1 e^{\varphi} - F_2 e^{-\varphi})\cos\varphi], \\ \text{innerer Zweig: } M = \dfrac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}[(E_1' e^{\varphi} - E_2' e^{-\varphi})\sin\varphi - (F_1' e^{\varphi} - F_2' e^{-\varphi})\cos\varphi]. \end{cases}$$

Rechte Trägerhälfte:

$$(44)\quad \begin{matrix} \text{äußerer Zweig} \\ \text{innerer Zweig} \end{matrix} \Big\{ M = \frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}[(G_1 e^{\varphi} - G_2 e^{-\varphi})\sin\varphi - (H_1 e^{\varphi} - H_2 e^{-\varphi})\cos\varphi].$$

In (43) und (44) ist für den inneren Zweig φ negativ einzusetzen.

Ähnliche Formeln ergeben sich für die Querkräfte. Besonders wichtig sind die Auflagerkräfte V^l und V^r. Nach Gl. (13) war:

$$Q = -\frac{E_0 s}{2} \cdot \frac{s^3}{2} \frac{d^3 y}{dx^3}, \text{ worin } \frac{s^3}{2} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

durch Gl. (11) bestimmt ist. Um V^l zu finden, setzen wir

$$x = a, \quad \varphi = \alpha'$$

und führen zur Abkürzung ein:

$$(45)\quad \begin{cases} \bar{a}' = \sin\alpha' + \cos\alpha', \\ \bar{a}'' = \sin\alpha' - \cos\alpha'. \end{cases}$$

Multipliziert man noch K mit $\frac{E_0 s}{2}$, so erhält man

$$(46)\quad \begin{cases} V^l = \dfrac{P}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}[(E_1 e^{\alpha'} - F_2 e^{-\alpha'})\bar{a}' + (E_2 e^{-\alpha'} + F_1 e^{\alpha'})\bar{a}''], \\ V^r = \dfrac{P}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}[(G_1 e^{\alpha'} - H_2 e^{-\alpha'})\bar{a}' + (G_2 e^{-\alpha'} + H_1 e^{\alpha'})\bar{a}'']. \end{cases}$$

Digitized by Google

Für das Moment unter der Last erhält man wegen $\varphi = 0$ den besonderen Wert:

(47) a) u. b) $$M = -\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}(F_1 - F_2) = -\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}(F'_1 - F'_2),$$

und an der symmetrisch gelegenen Stelle der rechten Trägerhälfte:

(48) $$M = -\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}(H_1 - H_2).$$

Steht die Last P in der Mitte, so gehen die Konstanten in die besonders einfachen Werte $A_1\ B_1\ A_2\ B_2$ der Formeln (28a) Seite 35 über, die dann durch 2 zu dividieren sind. Um die Auflagerkräfte $V^l = V^r$ für diesen Belastungszustand zu erhalten, ersetze man in Formel (46)

$$\alpha' = \frac{x}{s} \text{ durch } \gamma' = \frac{l}{s},\ \bar{a}' \text{ und } \bar{a}'' \text{ durch } \bar{c}' \text{ und } \bar{c}'',$$

wobei

(49) $$\begin{cases} \bar{c}' = \sin\gamma' + \cos\gamma', \\ \bar{c}'' = \sin\gamma' - \cos\gamma'. \end{cases}$$

Es ergeben sich dann die Auflagerkräfte:

(50) $$V^l = V^r = \frac{P}{8(\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma)}[(A_1 e^{\gamma'} - B_2 e^{-\gamma'})\bar{c}' + (A_2 e^{-\gamma'} + B_1 e^{\gamma'})\bar{c}''].$$

Hierin bedeuten die Konstanten $A\,B$ nunmehr:

(51) $$\begin{cases} A_1 = -(e^{-\gamma} + c'), \\ A_2 = \quad e^{\gamma} - c'', \\ B_1 = \quad e^{-\gamma} - c'', \\ B_2 = \quad e^{\gamma} + c'. \end{cases}$$

Mit den abgeleiteten Formeln soll nun ein Zahlenbeispiel gerechnet werden. Für jeden Punkt des Trägers soll die Einflußlinie für M bestimmt werden, die Rechnung läßt sich bequem in Tabellenform durchführen. Hierbei kommt uns folgender Umstand zu statten. Sind p und q zwei beliebige Punkte des Trägers, so läßt sich leicht nachweisen, daß

(52) $$Mpq = Mqp$$

werden muß. Dieses Gesetz sagt aus, daß die Momentenfläche des Trägers für eine Last P im Punkt p zugleich Einflußfläche für Mp ist. Diese Eigenschaft teilt also der Balken auf zwei Stützen mit elastischer Zwischenstützung mit dem einfachen Balken.

Der Beweis werde der Bequemlichkeit wegen in Zahlen, nicht in Buchstaben geführt. Der Träger sei in acht gleiche Teile geteilt, es werde bewiesen, daß

$$M_{32} = M_{23} \text{ ist.}$$

Steht P auf 2, so braucht man zur Berechnung des Moments in 3 die Konstanten

$$E'_{12}\quad E'_{22}\quad F'_{12}\quad F'_{22}.$$

$x' = -1 \cdot \lambda$, $\varphi' = -1 \cdot \frac{\lambda}{s}$, wofür kurz -1 geschrieben werden soll, also $\frac{\lambda}{s} = 1$ gesetzt worden ist. Man erhält:

$$M_{32} = (E'_{12}e^{-1} - E'_{22}e^{+1})\sin(-1) - (F'_{12}e^{-1} - F'_{22}e^{+1})\cos(-1).$$

Digitized by Google

Die Konstante $\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}$ ist hierbei weggelassen worden, da es sich nur um einen Vergleich handelt. In die Konstanten wird eingesetzt:

$$a = +2, \quad b = -2, \quad \alpha = +4, \quad \beta = -4.$$
$$a' = \sin(+4) + \cos(+4), \quad b' = \sin(-4) + \cos(-4),$$
$$a'' = \sin(+4) - \cos(+4), \quad b'' = \sin(-4) - \cos(-4),$$
$$e^{\alpha} = e^{+4}, \quad e^{\beta} = e^{-4},$$
$$e^{-\alpha} = e^{-4}, \quad e^{-\beta} = e^{+4}.$$

Steht P auf 3, so ist für M_{23} $\varphi = +1$.

$$M_{23} = (E_{13}e^{+1} - E_{23}e^{-1})\sin(+1) - (F_{13}e^{+1} - F_{23}e^{-1})\cos(+1).$$
$$a = +3, \; b = -1, \; \alpha = +6, \; \beta = -2.$$
$$a' = \sin(+6) + \cos(+6), \quad b' = \sin(-2) + \cos(-2),$$
$$a'' = \sin(+6) - \cos(+6), \quad b'' = \sin(-2) - \cos(-2).$$
$$e^{\alpha} = e^{+6}, \quad e^{\beta} = e^{-2},$$
$$e^{-\alpha} = e^{-6}, \quad e^{-\beta} = e^{+2}.$$

Man erhält nun für die zu vergleichenden Momente folgende Ausdrücke nach Einsetzen der Konstanten aus Gl. (40) bis (42):

$M_{32} =$

$$\begin{aligned}
&+[\; c''\cos\gamma + e^{\gamma}\;\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+4)+\cos(+4)]e^{+4}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-4)+\cos(-4)]e^{-4}\cos\gamma]e^{-1}\sin(-1)\\
&-[\; c'\cos\gamma - e^{-\gamma}\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+4)-\cos(+4)]e^{-4}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-4)-\cos(-4)]e^{+4}\cos\gamma]e^{+1}\sin(-1)\\
&-[\; c'\cos\gamma - e^{\gamma}\;\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+4)-\cos(+4)]e^{+4}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-4)-\cos(-4)]e^{-4}\cos\gamma]e^{-1}\cos(-1)\\
&+[-c''\cos\gamma - e^{-\gamma}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(+4)+\cos(+4)]e^{-4}\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(-4)+\cos(-4)]e^{+4}\cos\gamma]e^{+1}\cos(-1).
\end{aligned}$$

$M_{23} =$

$$\begin{aligned}
&+[\; c'\cos\gamma - e^{-\gamma}\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+6)+\cos(+6)]e^{+2}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-2)+\cos(-2)]e^{-6}\cos\gamma]e^{+1}\sin(+1)\\
&-[\; c''\cos\gamma + e^{\gamma}\;\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+6)-\cos(+6)]e^{-2}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-2)-\cos(-2)]e^{+6}\cos\gamma]e^{-1}\sin(+1)\\
&-[\; c''\cos\gamma + e^{-\gamma}\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(+6)-\cos(+6)]e^{+2}\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(-2)-\cos(-2)]e^{-6}\cos\gamma]e^{+1}\cos(+1)\\
&+[-c'\cos\gamma + e^{\gamma}\;\mathfrak{Cof}\gamma + [\sin(+6)+\cos(+6)]e^{-2}\mathfrak{Cof}\gamma - [\sin(-2)+\cos(-2)]e^{+6}\cos\gamma]e^{-1}\cos(+1).
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Glieder jeder Zeile sind bei beiden Momenten gleich. Um dies für die übrigen auch nachzuweisen, führen wir ein $\mathfrak{Cof}\gamma = \frac{1}{2}(e^{+8} + e^{-8})$. Dann lassen sich die beiden Klammern jeder Zeile in 6 Glieder ausmultiplizieren, von denen jedes einen der vier Faktoren:

$$e^{+11}, \quad e^{-11}, \quad e^{+5}, \quad e^{-5}$$

enthält. Zieht man die zu jedem dieser Faktoren gehörenden Glieder bei beiden Momenten zusammen, so läßt sich ihre Gleichheit leicht nachweisen. Wir begnügen uns damit, dies für die Glieder mit dem Faktor e^{+11} zu tun.

M_{32} enthält

$$\frac{e^{+11}}{2}[-\sin 4\sin(-1) - \cos 4\sin(-1) + \sin 4\cos(-1) - \cos 4\cos(-1)]$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{+11}(\sin 5 - \cos 5).$$

M_{23} enthält

$$\frac{e^{+11}}{2}[-\sin 6\sin 1 - \cos 6\sin 1 + \sin 6\cos 1 - \cos 6\cos 1] = \tfrac{1}{2}e^{+11}(\sin 5 - \cos 5).$$

Digitized by Google

Dasselbe läßt sich für die zu e^{-11}, e^{+5}, e^{-5} gehörigen Summen beweisen. Damit ist die Richtigkeit von Gl. (52) nachgewiesen.

Sollen die Einflußlinien für die Momente von sieben Zwischenpunkten des Trägers bestimmt werden, so wären allgemein folgende $7 \cdot 7 = 49$ Ordinaten η zu berechnen:

	für	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
inf.	P in 1	$\underline{\eta_{11}}$	$\underline{\eta_{21}}$	$\underline{\eta_{31}}$	$\underline{\eta_{41}}$	$\underline{\eta_{51}}$	$\underline{\eta_{61}}$	$\underline{\eta_{71}}$
»	» 2	η_{12}	$\underline{\eta_{22}}$	$\underline{\eta_{32}}$	$\underline{\eta_{42}}$	$\underline{\eta_{52}}$	$\underline{\eta_{62}}$	η_{72}
»	» 3	η_{13}	η_{23}	$\underline{\eta_{33}}$	$\underline{\eta_{43}}$	$\underline{\eta_{53}}$	η_{63}	η_{73}
»	» 4	η_{14}	η_{24}	η_{34}	$\underline{\eta_{44}}$	η_{54}	η_{64}	η_{74}
»	» 5	η_{15}	η_{25}	η_{35}	η_{45}	η_{55}	η_{65}	η_{75}
»	» 6	η_{16}	η_{26}	η_{36}	η_{46}	η_{56}	η_{66}	η_{76}
»	» 7	η_{17}	η_{27}	η_{37}	η_{47}	η_{57}	η_{67}	η_{77}.

Wegen der symmetrischen Anordnung ist

$$Mpq = M_{(n-p)(n-q)},$$

wenn n die Zahl der Felder bedeutet. Da ferner gilt

$$Mpq = Mqp,$$

so folgt hieraus, daß die Tabelle der Momentenordinaten beide Diagonalen als Symmetrieachsen hat, und alle zwischen den Diagonalen befindlichen Werte je viermal vorkommen. Man braucht also nur die unterstrichenen Werte der Tabelle zu berechnen, wovon außerdem noch die Diagonalwerte nach den einfachen Formeln (47) und (48) S. 39 als Sonderfälle zu bestimmen sind.

§ 10. Zahlenbeispiel.

Gegeben sei eine Halle mit acht Feldern und zwei getrennten Windverbänden. Die Maße sind in Abb. 40 eingetragen. Die Zwischenrahmen seien dieselben wie im ersten Beispiel, also auch die Werte h, J' v, τ. Es ist hiermit zunächst der die Elastizität der Stützung darstellende Wert E_0 zu berechnen.

Wirkt am oberen Ende einer Stütze die wagerechte Kraft W, so entsteht eine Durchbiegung

$$y = \frac{Wh^3}{3EJ'} + Wh\tau = \frac{Wh^3}{3EJ'}v,$$

worin v die Nachgiebigkeit der Einspannung berücksichtigt.

Wird die Stütze um y ausgebogen, so können wir umgekehrt auf die Wirkung einer Kraft

$$W = \frac{6EJ'y}{h^3 v}$$

schließen, wobei mit 2 multipliziert worden ist, da zu einem Rahmen zwei Stützen gehören. Der Widerstand für die Längeneinheit beträgt daher

$$x = \frac{W}{\lambda} = E_0 y,$$

woraus folgt

(53) $$E_0 = \frac{6EJ'}{h^3 \lambda v}.$$

Digitized by Google

Setzt man diesen Wert ein in $s = \sqrt[4]{4\frac{E}{E_0}J_b}$ (vgl. (6) S. 31), so ergibt sich

$$s = \sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{J_b}{J'}h^3\lambda v}. \tag{54}$$

Das Trägheitsmoment J_b des Balkens soll unter der Annahme berechnet werden,

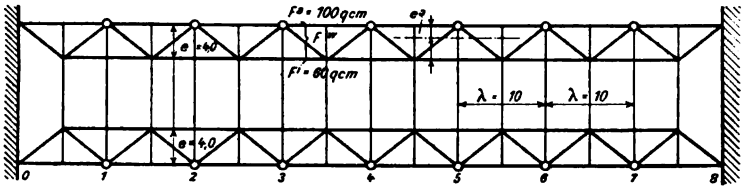

Abb. 40.

daß die Verbände die Gurtquerschnitte F^a und F^i haben, wobei F^a wegen der Belastung durch den Zwischenbinder größer sein soll, als F^i. Nennt man

$$F^w = F^a + F^i,$$

und das Verhältnis

$$\frac{F^i}{F^w} = k, \tag{55}$$

so ist der Abstand e^a des äußeren Gurtes von der Schwerachse des Trägers

$$e^a = ek, \tag{56}$$

und das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts

$$J_b = F^w e^2 k(1-k). \tag{57}$$

Wir erhalten nun in Zahlen:

$$F^w = (100 + 60)\ \text{qcm} = 0{,}016\ \text{qm};\quad k = \frac{60}{160} = \frac{3}{8} = 0{,}375;$$

$$J_b = 0{,}016 \cdot 4^2 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}625 = 0{,}060\ \text{m}^4;$$

für zwei Verbände also $J_b = 0{,}120\ \text{m}^4$.

Ferner ist

$$s^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}120}{0{,}0056} \cdot 10 \cdot 3209 \cdot 1{,}14 = 522500;\quad s = 27\ \text{m}.$$

Es sind vier Laststellungen zu untersuchen.

Die Zahlentafel Seite 43 enthält die zur Bildung der Konstanten und weiter zur Berechnung der Momente erforderlichen Hilfswerte für alle in Betracht kommenden Werte φ und 2φ. Die Zahlen der Reihe 4 gelten für $\varphi = \gamma' = 1{,}48$ und $2\varphi = \gamma = 2{,}96$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,\gamma &= 9{,}6748; \quad \mathfrak{Cof}^2\gamma = 93{,}6018, \\ \cos\gamma &= -0{,}9836; \quad \cos^2\gamma = 0{,}9675, \quad \text{mithin} \\ & \qquad \mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma = 92{,}6343. \end{aligned}$$

Digitized by Google

	1	2	3	4
$\varphi = \frac{x}{s} = m \cdot \frac{10}{27}$	0,37	0,74	1,11	1,48
φ in Grad	21° 12′	42° 24′	63° 36′	84° 48′
$\sin \varphi$	+ 0,361 62	+ 0,674 30	+ 0,895 71	+ 0,995 88
$\cos \varphi$	+ 0,932 32	+ 0,738 46	+ 0,444 63	+ 0,090 63
$\sin(-\varphi)$	− 0,361 62	− 0,674 30	− 0,895 71	− 0,995 88
$\cos(-\varphi)$	+ 0,932 32	+ 0,738 46	+ 0,444 63	+ 0,090 63
e^{φ}	1,4477	2,0959	3,0343	4,3929
$e^{-\varphi}$	0,6907	0,4771	0,3296	0,2276
$\mathfrak{Cof}\,\varphi$	1,0692	1,2865	1,6819	2,3102
$\mathfrak{Sin}\,\varphi$	0,3785	0,8094	1,3523	2,0826
$2\varphi = 2m \cdot \frac{10}{27}$	0,74	1,48	2,22	2,96
2φ in Grad	42° 24′	84° 88′	127° 12′	169° 36′
$180 - 2\varphi$	—	—	52° 48′	10° 24′
$\sin(2\varphi)$	+ 0,674 30	+ 0,995 88	+ 0,796 53	+ 0,180 52
$\cos(2\varphi)$	+ 0,738 46	+ 0,090 63	− 0,604 60	− 0,983 57
$\sin(-2\varphi)$	− 0,674 30	− 0,995 88	− 0,796 53	− 0,180 52
$\cos(-2\varphi)$	+ 0,738 46	+ 0,090 63	− 0,604 60	− 0,983 57
$e^{2\varphi}$	2,0959	4,3929	9,2073	19,2979
$e^{-2\varphi}$	0,4771	0,2276	0,1086	0,0518
$\mathfrak{Cof}\,2\varphi$	1,2865	2,3102	4,6579	9,6748
$\mathfrak{Sin}\,2\varphi$	0,8094	2,0826	4,5493	9,6230

Mit $c' = \sin\gamma + \cos\gamma = -0{,}803\,05$,
$c'' = \sin\gamma - \cos\gamma = +1{,}164\,09$,

bilden wir folgende Hilfswerte:

$$
\begin{aligned}
c' \cos\gamma &= (-0{,}803\,05)(-0{,}983\,57) = +\ 0{,}7899 \\
c' \mathfrak{Cof}\,\gamma &= (-0{,}803\,05)\quad (9{,}6748) = -\ 7{,}7693 \\
c'' \cos\gamma &= (+1{,}164\,09)(-0{,}983\,57) = -\ 1{,}1450 \\
c'' \mathfrak{Cof}\,\gamma &= (+1{,}164\,09)\quad (9{,}6748) = +\ 11{,}2623 \\
e^{\gamma} \cos\gamma &= \quad (19{,}2979)\quad (-0{,}983\,57) = -\ 18{,}9808 \\
e^{\gamma} \mathfrak{Cof}\,\gamma &= \quad (19{,}2979)\quad (9{,}6748) = +\ 186{,}7033 \\
e^{-\gamma} \cos\gamma &= \quad (0{,}0518)\quad (-0{,}983\,57) = -\ 0{,}0509 \\
e^{-\gamma} \mathfrak{Cof}\,\gamma &= \quad (0{,}0518)\quad (9{,}6748) = +\ 0{,}5012\,.
\end{aligned}
$$

In Zahlentafel S. 44 sind die vorstehenden Werte noch einmal, nun nach der Laststellung geordnet, zusammengestellt und hieraus die Konstanten nach den Formeln (40) bis (42) berechnet worden.

Digitized by Google

	P in 1	P in 2	P in 3
	$\alpha'_1 = 0{,}37$	$\alpha'_2 = 0{,}74$	$\alpha'_3 = 1{,}11$
$\sin\alpha'$	+ 0,361 36	+ 0,674 30	+ 0,895 71
$\cos\alpha'$	+ 0,932 32	+ 0,738 46	+ 0,444 64
$\bar{a}'$	+ 1,293 95	+ 1,412 76	+ 1,340 35
$\bar{a}''$	− 0,570 69	− 0,064 16	+ 0,451 07
$e^{\alpha'}$	1,4477	2,0959	3,0343
$e^{-\alpha'}$	0,6907	0,4771	0,3296
	$\alpha_1 = 0{,}74$	$\alpha_2 = 1{,}48$	$\alpha_3 = 2{,}22$
$\sin\alpha$	+ 0,674 30	+ 0,995 88	+ 0,796 53
$\cos\alpha$	+ 0,738 46	+ 0,090 63	− 0,604 60
a'	+ 1,412 76	+ 1,086 51	+ 0,191 93
a''	− 0,064 16	+ 0,905 25	+ 1,401 13
e^{α}	2,0959	4,3929	9,2073
$e^{-\alpha}$	0,4771	0,2276	0,1086
	$\beta_1 = -2{,}22$	$\beta_2 = -1{,}48$	$\beta_3 = -0{,}74$
$\sin\beta$	− 0,796 53	− 0,995 88	− 0,674 30
$\cos\beta$	− 0,604 60	+ 0,090 63	+ 0,738 46
b'	− 1,401 13	− 0,905 25	+ 0,064 16
b''	− 0,191 93	− 1,086 51	− 1,412 76
e^{β}	0,1086	0,2276	0,4771
$e^{-\beta}$	9,2073	4,3929	2,0959
E_1	− 124,9046	− 45,6856	− 3,6094
E_2	+ 186,0216	+ 188,2599	+ 191,8855
F_1	+ 5,1651	− 38,8763	− 28,9039
F_2	+ 184,5091	+ 184,3943	+ 187,3810
E'_1	+ 60,3650	+ 139,5840	+ 181,6602
E'_2	+ 0,7520	+ 2,9903	+ 6,6159
F'_1	− 180,1045	− 224,1459	− 214,1735
F'_2	− 0,7605	− 0,8753	+ 2,1114
$G_1 = G'_1$	+ 1,3912	+ 5,0169	+ 7,2552
$G_2 = G'_2$	+ 11,6166	+ 53,6927	+ 132,9117
$H_1 = H'_1$	− 9,7438	− 12,7306	− 12,6158
$H_2 = H'_2$	− 17,0487	− 27,0211	+ 17,0203

Es werden nun die Auflagerdrucke und Momente für die vorstehenden drei Belastungsfälle gebildet, vgl. die Formeln (43), (44), (46) bis (48), und zwar zunächst ohne den konstanten Faktor $\frac{P}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}$ für die Auflagerkräfte und $\frac{Ps}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)}$ für die Momente.

Digitized by Google

Last in 1.

$$V^l = (-124{,}905 \cdot 1{,}448 - 184{,}509 \cdot 0{,}691) \cdot 1{,}294 + (186{,}022 \cdot 0{,}691 + 5{,}165 \cdot 1{,}448) \cdot (-0{,}571) = -476{,}69$$

$$V^r = (+1{,}391 \cdot 1{,}448 + 17{,}049 \cdot 0{,}691) \cdot 1{,}294 + (11{,}617 \cdot 0{,}691 - 9{,}744 \cdot 1{,}448)(-0{,}571) = +29{,}08$$

$$\begin{cases} M_{11} = -(+5{,}17 - 184{,}51) = \\ \qquad -(-180{,}10 + 0{,}76) = & +179{,}34 \\ M_{71} = -(-9{,}74 + 17{,}05) = & -7{,}31 \end{cases}$$

$$\varphi = -0{,}37 \begin{cases} M_{21} = (+60{,}365 \cdot 0{,}691 - 0{,}752 \cdot 1{,}448)(-0{,}362) \\ \qquad + (180{,}104 \cdot 0{,}691 - 0{,}760 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = & +100{,}26 \\ M_{61} = (+1{,}391 \cdot 0{,}691 - 11{,}616 \cdot 1{,}448)(-0{,}362) \\ \qquad + (9{,}744 \cdot 0{,}691 - 17{,}049 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = & -11{,}00 \end{cases}$$

$$\varphi = -0{,}74 \begin{cases} M_{31} = (+60{,}365 \cdot 0{,}477 - 0{,}752 \cdot 2{,}096)(-0{,}674) \\ \qquad + (180{,}104 \cdot 0{,}477 - 0{,}760 \cdot 2{,}096)(+0{,}738) = & +43{,}89 \\ M_{51} = (+1{,}391 \cdot 0{,}477 - 11{,}616 \cdot 2{,}096)(-0{,}674) \\ \qquad + (9{,}744 \cdot 0{,}477 - 17{,}049 \cdot 2{,}096) \cdot 0{,}738 = & -6{,}97 \end{cases}$$

$$\varphi = -1{,}11 \begin{cases} M_{41} = (+60{,}365 \cdot 0{,}3296 - 0{,}752 \cdot 3{,}0343)(-0{,}8957) \\ \qquad + (180{,}104 \cdot 0{,}3296 - 0{,}7605 \cdot 3{,}0343) \cdot 0{,}4446 = & +9{,}63 \\ M_{41} = (+1{,}3913 \cdot 0{,}3296 - 11{,}616 \cdot 3{,}0343)(-0{,}8957) \\ \qquad + (9{,}744 \cdot 0{,}3296 - 17{,}0487 \cdot 3{,}0343) \cdot 0{,}4446 = & +9{,}56 \end{cases}$$

Last in 2.

$$V^l = (-45{,}686 \cdot 2{,}096 - 184{,}394 \cdot 0{,}477) \cdot 1{,}413 + (188{,}260 \cdot 0{,}477 - 38{,}876 \cdot 2{,}096)(-0{,}064) = -260{,}13$$

$$V^r = (+5{,}017 \cdot 2{,}096 + 27{,}021 \cdot 0{,}477) \cdot 1{,}413 + (53{,}693 \cdot 0{,}477 - 12{,}730 \cdot 2{,}096)(-0{,}064) = +33{,}15$$

$$M_{22} = -(-224{,}146 + 0{,}875) = -(-38{,}876 - 184{,}394) = +223{,}27$$

$$M_{62} = -(-12{,}731 + 27{,}021) = -14{,}29$$

$$\varphi = -0{,}37 \begin{cases} M_{32} = (+139{,}584 \cdot 0{,}691 - 2{,}990 \cdot 1{,}448)(-0{,}362) = \\ \qquad + (224{,}146 \cdot 0{,}691 - 0{,}875 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = & +109{,}81 \\ M_{52} = (+5{,}017 \cdot 0{,}691 - 53{,}693 \cdot 1{,}448)(-0{,}362) \\ \qquad + (12{,}731 \cdot 0{,}691 - 27{,}021 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = & -1{,}38 \end{cases}$$

$$\varphi = -0{,}74 \begin{cases} M_{42} = (+139{,}584 \cdot 0{,}477 - 2{,}990 \cdot 2{,}096)(-0{,}674) \\ \qquad + (224{,}146 \cdot 0{,}477 - 0{,}875 \cdot 2{,}096) \cdot 0{,}738 = & +36{,}91 \\ M_{12} = (+5{,}017 \cdot 0{,}477 - 53{,}693 \cdot 2{,}096)(-0{,}674) \\ \qquad + (12{,}731 \cdot 0{,}477 - 27{,}021 \cdot 2{,}096) \cdot 0{,}738 = & +36{,}92 \end{cases}$$

Last in 3.

$$V^l = (-3{,}609 \cdot 3{,}034 - 187{,}381 \cdot 0{,}330) \cdot 1{,}340 + (191{,}885 \cdot 0{,}330 - 28{,}904 \cdot 3{,}034) \cdot 0{,}451 = -108{,}53$$

Digitized by Google

$$V^r = (+\,7{,}255 \cdot 3{,}034 - 17{,}020 \cdot 0{,}330) \cdot 1{,}340$$
$$+\,(132{,}912 \cdot 0{,}330 - 12{,}616 \cdot 3{,}034) \cdot 0{,}451 = \quad +\,24{,}48$$

$$M_{33} = -\,(-\,28{,}904 - 187{,}381) =$$
$$= -\,(-\,214{,}173 - 2{,}114) = \quad +\,216{,}29$$

$$M_{53} = -\,(-\,12{,}616 - 17{,}020) = \quad +\,29{,}64$$

$$\varphi = -\,0{,}37 \begin{cases} M_{43} = (+\,181{,}660 \cdot 0{,}691 - 6{,}616 \cdot 1{,}448)(-\,0{,}362) \\ \quad +\,(214{,}173 \cdot 0{,}691 + 2{,}111 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = \quad +\,98{,}81 \\ M_{43} = (+\,7{,}255 \cdot 0{,}691 - 132{,}912 \cdot 1{,}448)(-\,0{,}362) \\ \quad +\,(12{,}616 \cdot 0{,}691 + 17{,}020 \cdot 1{,}448) \cdot 0{,}932 = \quad +\,98{,}95. \end{cases}$$

Die Momente in 4 sind hierbei sowohl nach Gl. (47a) als auch nach (47b) gerechnet, um eine Kontrolle zu haben. Es ergeben sich nur geringe Unterschiede.

Steht die Last P in 4, so gelten die Konstanten A und B der Formeln (51) Seite 39. Man findet

$$A_1 = -\,(e^{-\gamma} + c') = -\,(0{,}0518 - 0{,}8031) = +\;0{,}7513,$$
$$A_2 = \quad e^{\gamma} + c' = \quad 19{,}2979 - 0{,}8031 = +\,18{,}1338,$$
$$B_1 = \quad e^{-\gamma} - c'' = +\;0{,}0518 - 1{,}1641 = -\;1{,}1123,$$
$$B_2 = \quad e^{\gamma} + c' = \quad 19{,}2979 - 0{,}8031 = +\,18{,}4948.$$

Für die Auflagerkraft braucht man noch

$$\bar{c}' = \sin\gamma' + \cos\gamma' = +\,0{,}995\,88 + 0{,}090\,63 = 1{,}0864,$$
$$\bar{c}'' = \sin\gamma' - \cos\gamma' = +\,0{,}995\,88 - 0{,}090\,63 = 0{,}9052.$$

Um die zu errechnenden Werte auf denselben Nenner zu bringen, wie die übrigen, muß man noch mit

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma - \cos\gamma = 9{,}6748 + 0{,}9836 = 10{,}6584$$

multiplizieren. Ohne die konstanten Faktoren (vgl. S. 44) erhält man nun

$$M_{44}\text{ (unter der Last)} = 10{,}6584\,(-\,B_1 + B_2)$$
$$= 10{,}6584\,(+\,1{,}1123 + 18{,}4948) = +\,208{,}98.$$

$$V^l = V^r = 10{,}6584\,[(+\;0{,}7513 \cdot 4{,}3929 - 18{,}4948 \cdot 0{,}2276)\,1{,}0864$$
$$(+\,18{,}1338 \cdot 0{,}2276 - \;1{,}1123 \cdot 4{,}3929)\,0{,}9052] = -\,17{,}85.$$

Hiermit mit sind alle unterstrichenen η-Zahlen der Tabelle S. 41 berechnet, ebenso die Auflagerkräfte für jede Laststellung. Der Übersichtlichkeit wegen seien die Ergebnisse in folgender Zahlentafel noch einmal zusammengestellt.

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	Σ
M_1	179,3	100,3	43,9	9,6	− 7,0	−11,0	− 7,3	307,8
M_2	100,3	223,3	109,8	36,9	− 1,4	−14,3	−11,0	443,6
M_3	43,9	109,8	216,3	98,9	29,6	− 1,4	− 7,0	490,1
M_4	9,6	36,9	98,9	209,0	98,9	36,9	9,6	499,8
M_5	− 7,0	− 1,4	29,6	98,9	216,3	109,8	43,9	490,1
M_6	−11,0	−14,3	− 1,4	36,9	109,8	223,3	100,3	443,6
M_7	− 7,3	−11,0	− 7,0	9,6	43,9	100,3	179,3	307,8

In den Abb. 41, 42 Seite 47 sind dieselben Werte als Einflußlinien aufgetragen worden. Nach (52) sind diese Momenteneinflußflächen zugleich Momentenflächen für die vier untersuchten Laststellungen.

Digitized by Google

Die Multiplikatoren sind:

für die Momente: $\frac{s}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)} = \frac{27}{8 \cdot 92{,}63} = 0{,}036\,43,$

für die Auflagerkräfte: $\frac{1}{8(\mathfrak{Cof}^2\gamma - \cos^2\gamma)} = \frac{1}{741{,}04} = 0{,}001\,35.$

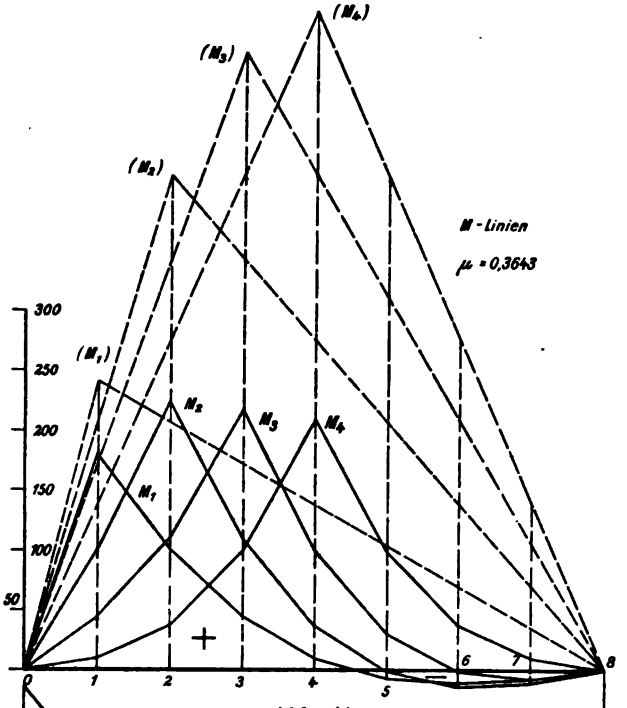

Abb. 41.

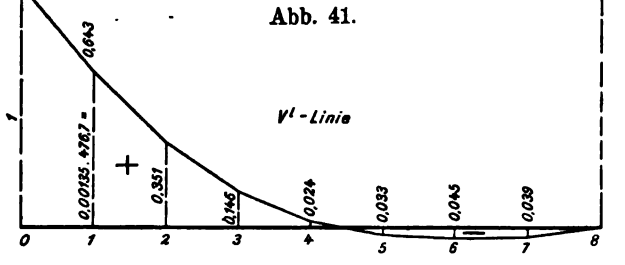

Abb. 42.

Zum Vergleich sind die M-Linien des einfachen Balkens ohne elastische Zwischenstützung in Abb. 41 gestrichelt eingetragen worden, die durch ihre Spitzenordinaten gegeben sind. Diese sind

$$\eta_{11} = \frac{10 \cdot 70}{80} = \frac{7}{8} \cdot 10 = 8{,}75; \quad \text{div. durch } 0{,}036\,43 = 240,$$

$$\eta_{22} = \frac{12}{8} \cdot 10 = 15; \quad \text{» » } 0{,}036\,43 = 412,$$

$$\eta_{33} = \frac{15}{8} \cdot 10 = 18{,}75; \quad \text{» » } 0{,}036\,43 = 515,$$

$$\eta_{44} = \frac{16}{8} \cdot 10 = 20; \quad \text{» » } 0{,}036\,43 = 550.$$

Digitized by Google

Die vorstehenden Ergebnisse gelten für einen vollwandigen Balken mit durchlaufender elastischer Stützung. Wenden wir sie auf den vorliegenden Fall eines Parallelträgers mit Einzelstützen nach Abb. 40 an, so sind durch die Momente zunächst die Spannkräfte der zugehörigen Stäbe der inneren Gurtung gegeben. Da beide Verbände gleichermaßen wirken sollen, so erhalten wir für die Gurtkraft

$$X_r^r = +\frac{M_r}{2e}, \quad X_r^l = -\frac{M_r}{2e}. \tag{58}$$

Um auch für die übrigen Stäbe ähnliche Ausdrücke zu finden, betrachte man (Abb. 43) Zustand $X_r = -1$. Die Stabbezeichnungen sind dort eingetragen. Es ist

$$L_r^r = X_r\left(-\frac{1}{2}\right) + X_{r-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4e}(M_{r-1} + M_r). \tag{59}$$

Die gegenüberliegende Gurtkraft L_r^l ist stets gleich groß mit entgegengesetztem Vorzeichen.

$$D_r^r = X_r\left(\frac{-1}{2\cos\varphi}\right) + X_{r-1}\left(\frac{+1}{2\cos\varphi}\right) = \frac{+1}{4e\cos\varphi}(M_{r-1} - M_r). \tag{60}$$

Die gleiche Spannkraft herrscht in $D_r'^l$, die beiden übrigen D-Stäbe, $D_r'^r$ und D_r^l, haben gleiche Spannkräfte mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Durch $D_1'^r$ und $D_1'^l$ ist auch der Auflagerdruck bestimmt. Nennt man V^l positiv, wenn von links nach rechts gerichtet, so ist

$$V^l = \sin\varphi\,(D_1'^r - D_1'^l).$$

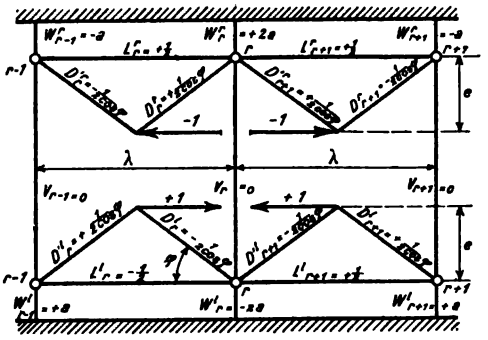

Abb. 43.

Nun ist

$$D_1'^r = \frac{M_1}{4e\cos\varphi},$$

$$D_1'^l = \frac{-M_1}{4e\cos\varphi},$$

also

$$V^l = \frac{M_1}{2e}\operatorname{tg}\varphi,$$

und weil

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2e}{\lambda},$$

$$V^l = +\frac{M_1}{\lambda}. \tag{61}$$

Es ist also die V^l-Linie gleich der M_1-Linie mit dem Multiplikator $\frac{0{,}036\,43}{\lambda} = 0{,}003\,643$. Wir vergleichen die so erhaltenen Werte mit den vorher berechneten:

	V^l als Endquerkraft:	$V^l = \frac{M_1}{\lambda}$:
η_1	$= 0{,}001\,35 \cdot 476{,}7 = 0{,}643$;	$0{,}003\,643 \cdot 179{,}3 = 0{,}653$,
η_2	$= 0{,}001\,35 \cdot 260{,}1 = 0{,}351$;	$0{,}003\,643 \cdot 100{,}3 = 0{,}365$,
η_3	$= 0{,}001\,35 \cdot 108{,}5 = 0{,}146$;	$0{,}003\,643 \cdot 43{,}9 = 0{,}160$,
η_4	$= 0{,}001\,35 \cdot 17{,}8 = 0{,}024$;	$0{,}003\,643 \cdot 9{,}6 = 0{,}035$,
η_5	$= 0{,}001\,35 \cdot (-24{,}5) = -0{,}033$;	$0{,}003\,643 \cdot (-7{,}0) = -0{,}026$,
η_6	$= 0{,}001\,35 \cdot (-33{,}1) = -0{,}045$;	$0{,}003\,643 \cdot (-11{,}0) = -0{,}040$,
η_7	$= 0{,}001\,35 \cdot (-29{,}1) = -0{,}039$;	$0{,}003\,643 \cdot (-7{,}3) = -0{,}027$,
	$\Sigma = +1{,}047$.	$\Sigma = +1{,}120$.

Digitized by Google

Die Unterschiede in den größeren Werten sind unbedeutend.

Für die Widerstände W^r der rechten Stütze gilt:

$$W_r^r = V_{0r} - X_r(+2a) - X_{r-1}(-a) - X_{r+1}(-a),$$

$$= V_{0r} + \frac{1}{2\lambda}(+M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1}). \tag{62}$$

Wirken die Lasten zur Hälfte an jeder Stütze eines Rahmens, oder greifen sie am Rahmen r selbst nicht an, so ist $V_0 = 0$ und

$$W_r^r = +\frac{1}{2\lambda}\Delta^2 M_r, \tag{63}$$

worin

$$\Delta^2 M_r = +M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1}.$$

Ebenso findet man für den Widerstand der linken (vorderen) Stütze für den entsprechenden Belastungsfall:

$$W_r^l = -\frac{1}{2\lambda}\Delta^2 M_r.$$

Für den Widerstand der Längeneinheit erhält man hieraus nach Gl. (1) S. 31:

$$z = \frac{W^l - W^r}{\lambda} = -\frac{\Delta^2 M_r}{\lambda^2},$$

was dem Ausdrucke (4)

$$z = \frac{d^2M}{dx^2}$$

entspricht, wenn man berücksichtigt, daß in (1) die positive z-Richtung von rechts nach links (oben nach unten, vergl. Abb. 25) in Formel (4) von unten nach oben vorausgesetzt ist.

Durch die M-Linien ist W für jede Lage der am Windverbande angreifenden Lasten bestimmt.

Der Einfluß der Höhenlage des Lastangriffspunktes soll in derselben Weise dargestellt werden wie im Abschnitt I, S. 23. Als Einflußlinie verwenden wir die in Abb. 27 Kurve II dargestellte, die dem Gesetze folgt

$$P' = P\left[c'\nu + \frac{3EJ'}{h^2}\tau(1-c)\right]\cdot\frac{1}{v} = P\frac{\bar{e}}{v},$$

setzen also für das an der Stelle i des Balkens infolge einer am Rahmen k in der Höhe $c = \frac{f}{h}$ angreifenden Last P entstehende Moment

$$M_{ik} = P\eta_{ik}\cdot\frac{\bar{e}}{v}, \tag{64}$$

woraus sich mit $c = 0$

$$M_{ik} = P\eta_{ik} \tag{65}$$

ergibt.

Weiter ist nach Gl. (62) Seite 23:

$$V_0 = -\frac{P}{2}\frac{\bar{e}}{v},$$

und wenn am Rahmen mehrere Kräfte wirken:

$$V_0 = -\frac{1}{2v}\Sigma P\bar{e}.$$

Digitized by Google

Im allgemeinsten Belastungsfall muß W_r aus V_{0r} und den drei Momenten M_{r-1} M_r, M_{r+1} nach Gl. (62) bestimmt werden, um die Beanspruchung der Stütze zu berechnen. Die wichtigsten Sonderfälle sind:

Gleiche Last P an jedem Rahmen in gleicher Höhe, und Einzellast P an Rahmen, dessen Beanspruchung berechnet werden soll. Im ersten Falle ist:

$$M_i = \frac{P\bar{c}}{v}\sum_{1}^{n-1}\eta_i; \quad V_0 = -\frac{P\bar{c}}{2v},$$

$$W_r^r = -\frac{P\bar{c}}{2v} + \frac{P\bar{c}}{2\lambda v}[\Sigma\eta_{r-1} - 2\Sigma\eta_r + \Sigma\eta_{r+1}]$$

$$= -\frac{P\bar{c}}{2v}\left(1 - \frac{\Delta^2\Sigma\eta_r}{\lambda}\right). \tag{66}$$

Im zweiten Falle bleibt V_0, während sich ergibt:

$$M_{(r-1)r} = \frac{P\bar{c}}{v}\eta_{(r-1)r}; \quad M_{rr} = \frac{P\bar{c}}{v}\eta_{rr}; \quad M_{(r+1)r} = \frac{P\bar{c}}{v}\eta_{(r+1)r}.$$

$$W_r^r = -\frac{P\bar{c}}{2v}\left[1 - \frac{1}{\lambda}(\eta_{(r-1)r} - 2\eta_{rr} + \eta_{(r+1)r})\right]$$

$$= -\frac{P\bar{c}}{2v}\left(1 - \frac{\Delta^2\eta_{rr}}{\lambda}\right). \tag{67}$$

Für die Widerstände W^l erhält man aus Abb. 43 den allgemeinen Ausdruck:

$$W_r^l = +V_{0r} + X_r \cdot 2a + X_{r-1}(-a) + X_{r+1}(-a),$$

$$= +V_{0r} - \frac{1}{2\lambda}(M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1}).$$

Um die Belastung des Windverbandes (vgl. S. 21) zu bestimmen, bilde man

$$P_r^w = W_r^l - W_r^r = -\frac{1}{\lambda}(M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1}). \tag{68}$$

Wirkt nur am Rahmen m die Last P, so wird

$$M_{(r-1)m} = P\frac{\bar{c}}{v}\eta_{(r-1)m}, \quad M_{rm} = P\frac{\bar{c}}{v}\eta_{rm}, \quad M_{(r+1)m} = P\frac{\bar{c}}{v}\eta_{(r+1)m},$$

und da nach Gl. (52) Seite 39

$$\eta_{rm} = \eta_{mr},$$

so gehören die drei Ordinaten η derselben Einflußlinie an, und man kann schreiben

$$P_{rm}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\Delta^2\eta_{mr}. \tag{69}$$

Wirkt beispielsweise P am Rahmen 4, so wird:

$$P_{14}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\cdot 0{,}03643(\quad 0 - 2\cdot 9{,}6 + 36{,}9) = -0{,}0645\,P\frac{\bar{c}}{v},$$

$$P_{24}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\cdot 0{,}03643(+ 9{,}6 - 2\cdot 36{,}9 + 98{,}9) = -0{,}1262\,P\frac{\bar{c}}{v},$$

$$P_{34}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\cdot 0{,}03643(+ 36{,}9 - 2\cdot 98{,}9 + 209{,}0) = -0{,}1760\,P\frac{\bar{c}}{v},$$

$$P_{44}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\cdot 0{,}03643(+ 98{,}9 - 2\cdot 209{,}0 + 98{,}9) = +0{,}8030\,P\frac{\bar{c}}{v},$$

$$P_{54}^w = -\frac{P\bar{c}}{\lambda v}\cdot 0{,}03643(+ 209{,}0 - 2\cdot 98{,}9 + 36{,}9) = -0{,}1760\,P\frac{\bar{c}}{v},$$

usw.

Digitized by Google

Für die Auflagerkräfte erhält man nach S. 48 mit $V^l = \frac{M_1}{\lambda}$:

$$V^l = V^r = 0{,}035\,\frac{P\bar{c}}{v}.$$

Unter der Wirkung der Lasten P^w und der Auflagerkräfte V muß der Windverband im Gleichgewichte sein:

$$2\,(0{,}035 + 0{,}064 + 0{,}126 + 0{,}176) - 0{,}803 = 0 \quad \text{(vgl. S. 22)}.$$

Auch hier wachsen die P^w-Kräfte der unbelasteten Rahmen nahezu geradlinig nach dem belasteten hin.

Ein guter Maßstab für die versteifende Wirkung des Verbandes liegt auch in dem Nachweis der Durchbiegung. Beschränkt man sich auf die Durchbiegung in der Mitte, so genügt Teilbelastungszustand I, der in der Mitte die doppelte Durchbiegung liefert wie die einseitig wirkende Last P.

Greift P in der Mitte an, so gelten für die Konstanten die einfachen Formeln (28a) und (29a) Seite 35. Für die Durchbiegung unter der Last erhält man aus Gl. (8) S. 32 mit $\varphi = 0$

$$y = A_1 + A_2 = \frac{P}{2E_0 s} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\gamma - \sin\gamma}{\mathfrak{Cof}\gamma + \cos\gamma}. \tag{70}$$

Ohne den Windverband würde der Rahmen durch eine am oberen Stützenende angreifende Last P eine Durchbiegung erleiden:

$$y' = \frac{Ph^3 v}{2 \cdot 3EJ'},$$

da zwei Stützen vorhanden sind.

Nach Gl. (53) S. 41 ist $E_0 = \frac{6EJ'}{h^3 \lambda v}$, so daß man schreiben kann:

$$y = \frac{\lambda}{2s} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\gamma - \sin\gamma}{\mathfrak{Cof}\gamma + \cos\gamma} \cdot y', \tag{71}$$

wofür man mit den Zahlenwerten von S. 42 erhält:

$$y = \frac{9{,}6230 - 0{,}1805}{9{,}6748 - 0{,}9836} \cdot \frac{10}{2 \cdot 27}\, y' = 0{,}201\, y'.$$

Die Durchbiegung des durch den Verband versteiften Rahmens beträgt also $\frac{1}{5}$ der eines freistehenden Rahmens (vgl. auch Seite 25).

Bei großer Hallenlänge nähert sich der Quotient $\frac{\mathfrak{Sin}\gamma - \sin\gamma}{\mathfrak{Cof}\gamma + \cos\gamma}$ immer mehr dem Werte 1, so daß man angenähert

$$y = \frac{\lambda}{2s} \cdot y' = 0{,}185\, y' \tag{72}$$

setzen darf. Wirkt an jedem Rahmen in gleicher Höhe gleichzeitig dieselbe Kraft P, so lassen sich für diesen Sonderfall einfache Formeln ableiten, die man zur Kontrolle der Ordinatensummen Seite 46 benutzen kann.

Wir nehmen an, daß die Lasten P sämtlich in der Balkenebene wirken, und ersetzen sie durch eine gleichmäßig verteilte Last $p = \frac{P}{\lambda}$.

Digitized by Google

Mit Beachtung der Bezeichnungen Seite 31 erhält man für die Belastungsordinate an der Stelle x:

$$x - p = \frac{d^2M}{dx^2} = E_0 y - p.$$

Die Differentialgleichung lautet also jetzt:

$$\frac{s^4}{4}\frac{d^4y}{dx^4} = -y + \frac{p}{E_0}, \tag{73}$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$y = (A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi}) \cos\varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi}) \sin\varphi + \frac{p}{E_0}. \tag{74}$$

Die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ usw. ändern sich nicht (9—11). Aus der Bedingung:

Für $x = 0$ ist $\frac{dx}{dx} = 0$ und $Q = -\frac{E_0 s^4}{4}\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, folgt

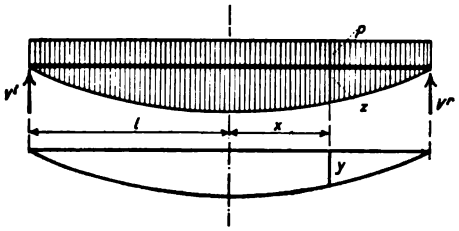

Abb. 44.

$$+A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = 0,$$
$$+B_1 + B_2 - A_1 + A_2 = 0;$$

hieraus

$$A_2 = A_1,$$
$$B_2 = -B_1.$$

Für $x = l$ wird $\varphi = \frac{l}{s} = \gamma'$ und

$$y = 0, \quad M = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$0 = (A_1 e^{\gamma'} + A_2 e^{-\gamma'}) \cos\gamma' + (B_1 e^{\gamma'} + B_2 e^{-\gamma'}) \sin\gamma' + \frac{p}{E_0},$$
$$0 = -(A_1 e^{\gamma'} - A_2 e^{-\gamma'}) \sin\gamma' + (B_1 e^{\gamma'} - B_2 e^{-\gamma'}) \cos\gamma'.$$

Nach Einsetzen von B_2 und A_2 findet man

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{p}{2E_0} \cdot \frac{\varrho}{(\varepsilon^2 + \varrho^2)} = A_2, \\ B_1 = -\frac{p}{2E_0} \cdot \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \varrho^2)} = -B_2, \end{cases} \tag{75}$$

worin

$$\varepsilon = \mathfrak{Sin}\,\gamma' \sin\gamma', \quad \varrho = \mathfrak{Cof}\,\gamma' \cos\gamma' \tag{76}$$

bedeutet. Für die Durchbiegung in Trägermitte folgt mit $\varphi = 0$:

$$y = \delta = A_1 + A_2 + \frac{p}{E_0} = \frac{p}{E_0}\left(1 - \frac{\varrho}{\varepsilon^2 + \varrho^2}\right). \tag{77}$$

Für das Biegungsmoment an der Stelle $\varphi = \frac{x}{s}$ ergibt sich:

$$M = E_0 s^2 (A_1\,\mathfrak{Sin}\,\varphi \sin\varphi - B_1\,\mathfrak{Cof}\,\varphi \cos\varphi), \tag{78}$$

und in Trägermitte, wegen $\sin\varphi = \mathfrak{Sin}\,\varphi = 0$, $\cos\varphi = \mathfrak{Cof}\,\varphi = 1$:

$$M = -E_0 s^2 B_1 = \frac{p s^2}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varrho^2}. \tag{79}$$

Die Auflagerkräfte folgen aus $Q = -\frac{E_0 s}{2} \cdot \frac{s^3}{2}\frac{d^3y}{dx^3}$, mit $\varphi = \gamma'$:

$$V^l = V^r = \frac{ps}{2(\varepsilon^2 + \varrho^2)}[\mathfrak{Sin}\,\gamma' \cos\gamma' (\varepsilon - \varrho) - \mathfrak{Cof}\,\gamma' \sin\gamma' (\varepsilon + \varrho)]. \tag{80}$$

Digitized by Google

Mit diesen Formeln sollen die Ergebnisse des Zahlenbeispiels geprüft werden. Vgl. Zahlentabelle Seite 46.

$$\varepsilon = 2{,}0827 \cdot 0{,}9959 = 2{,}0742; \qquad \varepsilon^2 = 4{,}3023.$$
$$\varrho = 2{,}3103 \cdot 0{,}0906 = 0{,}2093; \qquad \varrho^2 = 0{,}0438.$$
$$\varepsilon + \varrho = 2{,}2835; \quad \varepsilon^2 + \varrho^2 = 4{,}3461.$$
$$\varepsilon - \varrho = 1{,}8649.$$
$$A_1 = -\frac{p}{2E_0} \cdot \frac{0{,}2093}{4{,}3461} = -\frac{p}{2E_0} \cdot 0{,}0482.$$
$$B_1 = -\frac{p}{2E_0} \cdot \frac{2{,}0742}{4{,}3461} = -\frac{p}{2E_0} \cdot 0{,}4773.$$

Es entstehen folgende Momente:

$$M \text{ in } 1,\ \varphi = 1{,}11;\ M_1 = -\frac{ps^2}{2}(0{,}0482 \cdot 1{,}3524 \cdot 0{,}8957 - 0{,}4773 \cdot 1{,}6820 \cdot 0{,}4446) = +0{,}2985\frac{ps^2}{2}.$$

$$M \text{ in } 2,\ \varphi = 0{,}74;\ M_2 = -\frac{ps^2}{2}(0{,}0482 \cdot 0{,}8094 \cdot 0{,}6743 - 0{,}4773 \cdot 1{,}2865 \cdot 0{,}7385) = +0{,}4272\frac{ps^2}{2}.$$

$$M \text{ in } 3,\ \varphi = 0{,}37;\ M_3 = -\frac{ps^2}{2}(0{,}0482 \cdot 0{,}3785 \cdot 0{,}3616 - 0{,}4773 \cdot 1{,}0692 \cdot 0{,}9323) = +0{,}4692\frac{ps^2}{2}.$$

In Trägermitte entsteht nach Formel (79):

$$M_4 = +0{,}4773\frac{ps^2}{2}.$$

Setzt man $p = \frac{P}{\lambda}$ ein, so wird $\frac{ps^2}{2} = P \cdot \frac{27^2}{20} = 36{,}45\,P$, und man erhält:

	hingegen aus den Ordinatensummen
$M_1 = 0{,}299 \cdot 36{,}45\,P = 10{,}90\,P;$	$M_1 = 307{,}8 \cdot 0{,}03643\,P = 11{,}21\,P$
$M_2 = 0{,}427 \cdot 36{,}45\,P = 15{,}53\,P;$	$M_2 = 443{,}6 \cdot 0{,}03643\,P = 16{,}16\,P$
$M_3 = 0{,}469 \cdot 36{,}45\,P = 17{,}10\,P;$	$M_3 = 490{,}1 \cdot 0{,}03643\,P = 17{,}85\,P$
$M_4 = 0{,}477 \cdot 36{,}45\,P = 17{,}39\,P;$	$M_4 = 499{,}8 \cdot 0{,}03643\,P = 18{,}21\,P.$

Die Unterschiede sind darauf zurückzuführen, daß die polygonal gezeichneten Einflußlinien für die Knotenpunktmomente (Abb. 41) eine größere Fläche einschließen, als die für den stabförmigen Balken ohne Unterteilung geltenden stetig gekrümmten.

Die Auflagerkräfte sind

$$V^l = V^r = \frac{ps}{2 \cdot 4{,}3461}(2{,}0827 \cdot 0{,}0906 \cdot 1{,}8649 - 2{,}3103 \cdot 0{,}9959 \cdot 2{,}2835),$$
$$= -\frac{ps}{2} \cdot \frac{4.9020}{4{,}3461} = -1{,}128\frac{ps}{2},$$

und da $p = \frac{P}{\lambda}$, wird $V^l = V^r = -1{,}523P$.

Die Tabelle der Ordinaten liefert nach Hinzufügung von $\frac{1}{2}\eta_0$:

$$V^l = P(1{,}047 + 0{,}5) = 1{,}547P,$$

auch dieser Wert mußte sich etwas größer ergeben.

Digitized by Google

Die Durchbiegung in der Mitte ist

$$y_4 = \delta = \frac{p}{E_0}\left(1 - \frac{\varrho}{\varepsilon^2 + \varrho^2}\right) = 0{,}9518\,\frac{p}{E_0}$$

und mit

$$p = \frac{P}{\lambda}, \quad E_0 = \frac{6EJ'}{h^3 \lambda v} \quad \text{folgt} \quad \delta = 0{,}952\,\frac{Ph^3 v}{6EJ'},$$

während ohne die Versteifung durch den Windverband jeder Rahmen die gleiche Durchbiegung $\delta = \frac{Ph^3 v}{6EJ'}$ erfahren würde. Die versteifende Wirkung des Verbandes äußert sich auf den mittleren Rahmen in diesem Belastungsfalle nur noch in geringem Maße. Falls $\gamma' = 90°$, wird $\varrho = 0$, es entsteht dann im mittleren Rahmen dieselbe Durchbiegung, wie wenn kein Verband vorhanden wäre. Dies ist also der Fall für $\gamma' = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$, wenn also $l = 1{,}57\,s$ wird. Bei noch größerer Hallenlänge wird $\cos\gamma'$ negativ und der Faktor $1 - \frac{\varrho}{\varepsilon^2 + \varrho^2} > 1$, infolgedessen δ größer als bei fehlendem Windverband. Hieraus geht hervor, daß der Hauptwert derartiger Verbände bei langen Hallen darin besteht, die besonders ungünstige Wirkung großer Einzellasten zu mildern.

Es werde nun der mittlere Rahmen für die gleiche Belastung untersucht, wie im ersten Zahlenbeispiel Seite 24.

Die Lasten P_1 bis P_4 erzeugen im Rahmen r nach Gl. (66):

$$W_r^r = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta^2 \Sigma \eta_r}{\lambda}\right) \Sigma P \frac{\bar{v}}{v}.$$

Für P_5 ist $\frac{\bar{v}}{v} = 1$. Bei P_6 ist $V_0 = 0$, $\frac{\bar{v}}{v} = 1$, so daß die an jedem Rahmen in gleicher Höhe wirkenden Lasten P_{1-6} im Rahmen r hervorrufen:

$$W_r^r = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta^2 \Sigma \eta_r}{\lambda}\right)\left(\sum_1^4 P \frac{\bar{v}}{v} + P_5\right) + \frac{P_6}{2}\frac{\Delta^2 \Sigma \eta_r}{\lambda}.$$

Die Einzellast P_7 gibt nach Gl. (67) wegen $V_0 = 0$:

$$W_r^r = +\frac{P_7 \bar{v}_7}{2v}\frac{\Delta^2 \eta_{rr}}{\lambda}.$$

Im ganzen entsteht:

$$W_r^r = -\frac{1}{2\lambda}\left[(\lambda - \Delta^2 \Sigma \eta_r)\left(\sum_1^4 P \frac{\bar{v}}{v} + P_5\right) - P_6 \Delta^2 \Sigma \eta_r - P_7 \frac{\bar{v}_7}{v} \Delta^2 \eta_{rr}\right].$$

Für $r = 4$ (Trägermitte) wird

$$\Delta^2 \Sigma \eta_4 = 0{,}03643\,(+490 - 2 \cdot 499{,}8 + 490) = -0{,}714.$$
$$\Delta^2 \eta_{44} = 0{,}03643\,(+98{,}9 - 2 \cdot 209{,}0 + 98{,}9) = -8{,}022.$$

Die Kurve $\frac{\bar{v}}{v}$ Abb. 27 Seite 23 liefert:

für	P_1	P_2	P_3	P_4	P_7
$\frac{\bar{v}}{v} =$	0,10	0,24	0,425	0,655	0,715.

Digitized by Google

Die Kräfte sind:

$$P_1 \text{ bis } P_4 = 2{,}2\,\text{t}, \quad P_5 = 1{,}1\,\text{t}, \quad P_6 = 1{,}0\,\text{t}, \quad P_7 = 6{,}0\,\text{t}.$$

$$W_4^r = -\frac{1}{2 \cdot 10}[10{,}714\,(2{,}2 \cdot 1{,}42 + 1{,}1 \cdot 1{,}0) + 1{,}0 \cdot 0{,}714 + 6{,}0 \cdot 0{,}715 \cdot 8{,}022] = -4{,}02\,\text{t}.$$

Das Moment an der Einspannungsstelle der freistehenden Stütze betrug 127,45 tm. Es wird vermindert um $W^r \cdot h = 4{,}02 \cdot 14{,}75 = 59{,}30$ tm, so daß verbleiben 68,1 tm. Bei starr angenommenem Windverband war $M = 26$ tm.

§ 11. Schlußbemerkungen.

Die Untersuchung im I. Abschnitt bleibt bestehen, auch wenn der Windverband eine andere statisch bestimmte Gliederung zeigt. Abb. 45 stellt z. B. Zustand $X = -1$ für einen K-förmigen Verband dar. Der Beitrag der Diagonalen zum Koffizienten von X_r wird (vgl. Abb. 4)

$$4 \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d k^i = 4 \delta$$

und der Beitrag der Vertikalen:

$$4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{e}{2} k^v, \text{ und mit } \operatorname{tg} \varphi = \frac{e}{2\lambda} = a \text{ wird hieraus:}$$

$$2 a^2 e k^v = 2 \varepsilon.$$

Die Beiträge der Stützen und Gurtstäbe ändern sich nicht.

Ist die Stützenentfernung so groß, daß der Verband mehrere Zwischenknotenpunkte hat, in denen Lasten angreifen können, was namentlich bei Anordnungen nach Abb. 40 vorkommen kann, so bedarf die Rechnung einer Korrektur, da für die Stäbe der als Einzelbalken wirkenden Abschnitte des Windverbandes S_0 nicht mehr $= 0$ ist. Die Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen sind infolgedessen zwischen den Stützen nicht mehr geradlinig. Der Windverband verhält sich dann wie ein Balken von großer Steifigkeit auf schwimmenden Unterstützungen; man vergleiche hierzu das Zahlenbeispiel in »Müller-Breslau, Graphische Statik« II 2, Seite 192. Ebenso wie dort werden sich hier die Abweichungen der Einflußlinien für die Stützenmomente von dem gezeichneten Polygon nur sehr gering ergeben.

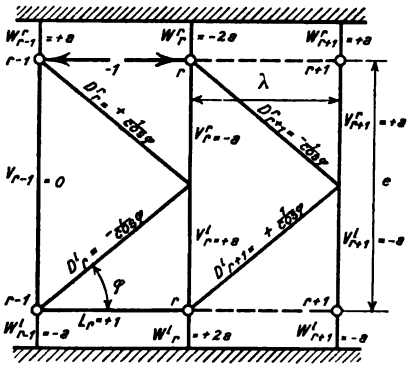

Abb. 45.

Die vorgetragenen Untersuchungen führen auch dann zum Ziele, wenn die Querrahmen andere Systeme bilden. Es ist dies z. B. bei manchen neueren Hellingbauten der Fall, Abb. 46, die aus ein- auch mehrfachen eingespannten Rahmen bestehen. Die Untersuchung dieser Querrahmen bildet dann die Vorberechnung. Im Abschnitt I ändern sich mit den Momenten in den Stützen auch die Stützenintegrale, also die Beiträge α und ϑ, ebenso τ und die Funktionen von $c = \frac{f}{h}$ enthaltenden Ausdrücke. Im Abschnitt II braucht für die Berechnung der statisch unbestimmten Größen nur ein anderer Wert E_0 eingeführt zu werden.

Digitized by Google

Ein anderer Fall liegt in Abb. 47 vor, wo die Stützen mit den Bindern Zweigelenkrahmen bilden. Die Querrahmen sind hier wieder nur einfach statisch unbestimmt. Setzt man starren Windverband voraus, so würde die Stützenachse bei beliebiger Formänderung lotrecht übereinander liegende Endpunkte aufweisen. In Wirklichkeit werden wegen der Nachgiebigkeit des Windverbandes nach Abb. 47a die Stützen durch die wagerechten Kräfte stärker beansprucht werden.

Mit ähnlichen wie den vorgeführten Untersuchungen lassen sich auch weitere Fragen von praktischer Bedeutung beantworten, z. B.:

um wieviel Felder eine Halle von gegebenen Abmessungen verlängert werden darf, wenn die mittleren Rahmen nicht übermäßig beansprucht werden sollen, oder

wie verhalten sich die Wirkungsgrade eines breiten oder mehrerer schmaler Verbände zueinander, mit Rücksicht auf den erforderlichen Materialaufwand?

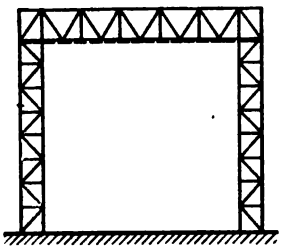

Abb. 46.

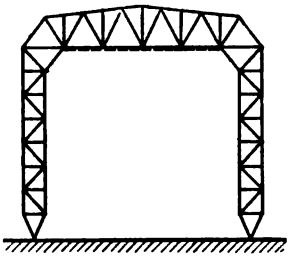

Abb. 47.

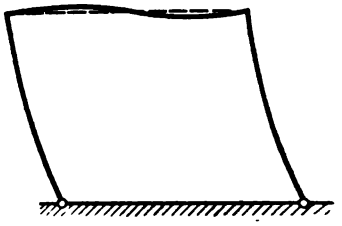

Abb. 47a.

Die Untersuchungen des I. Abschnitts gestalten sich besonders einfach, wenn keine festen Giebelwände vorhanden, die Endrahmen vielmehr den Zwischenrahmen gleich konstruiert sind. Bei großer Felderzahl kann man dann eins der Verfahren benutzen, die Müller-Breslau in der Seite 55 genannten Quelle für die Berechnung des Balkens auf sehr vielen elastischen Stützen verwendet: Herausschneiden eines Stückes von beschränkter Felderzahl zur Verminderung der Zahl der Unbekannten oder Annahme unendlich vieler Stützen.

Da der Schluß naheliegt, daß bei großer Hallenlänge die Beschaffenheit der Endrahmen auf den Formänderungs- und Spannungszustand der mittleren nur noch von geringem Einflusse sein kann, so setzen wir versuchsweise im Abschnitt II die Hallenlänge $2l = \infty$.

Es ist dann zulässig, den Lastangriffspunkt stets als jeweilige Trägermitte anzusehen, und es gelten für die Konstanten die Formeln Seite 35. Für $l = \infty$ ist $\gamma = \infty$ und

$$e^{+\gamma} = \infty, \quad e^{-\gamma} = 0,$$
$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0.$$

Der Faktor von A_1 ist:

$$\frac{e^{\gamma} - \sin\gamma + \cos\gamma}{\frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} + \cos\gamma},$$

er läßt sich schreiben

$$2 - 2 \cdot \frac{e^{-\gamma} + \cos\gamma + \sin\gamma}{e^{\gamma} + e^{-\gamma} + 2\cos\gamma}$$

Digitized by Google

und wird für $\gamma = \infty$ gleich 2. Es wird also

(81) $$A_2 = B_2 = \frac{P}{2E_0 s},$$

(die Formeln Seite 35 enthalten $2P$), und man erhält

(82) $$y = \frac{x}{E_0} = \frac{P}{2E_0 s} e^{-\varphi} (\sin \varphi + \cos \varphi),$$

(83) $$x = \frac{P}{2s} e^{-\varphi} (\sin \varphi + \cos \varphi),$$

(84) $$M = \frac{Ps}{4} e^{-\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi).$$

Es sind dies die gleichen Formeln, die sich ergeben, wenn man die starre Stützung an den Enden fallen läßt[1]). Mit diesen Formeln sollen die Ergebnisse unserer genaueren Rechnung verglichen werden.

Steht Last P in 4, so werden die Momente:

$$M_{14} = P \cdot \frac{27}{4} \cdot 0{,}3296\,(0{,}4446 - 0{,}8957) = -1{,}004\,P,$$

$$M_{24} = P \cdot \frac{27}{4} \cdot 0{,}4771\,(0{,}7385 - 0{,}6743) = +0{,}207\,P,$$

$$M_{34} = P \cdot \frac{27}{4} \cdot 0{,}6907\,(0{,}9323 - 0{,}3616) = +2{,}661\,P.$$

Unter der Last ist wegen $\varphi = 0$:

$$M_{44} = P\frac{s}{4} = P \cdot \frac{27}{4} = \qquad +6{,}750\,P.$$

Die genauere Rechnung lieferte (vgl. Seite 46):

$$M_{14} = +\ 9{,}6 \cdot 0{,}036\,43 = +0{,}350\,P,$$
$$M_{24} = +\ 36{,}9 \cdot 0{,}036\,43 = +1{,}344\,P,$$
$$M_{34} = +\ 98{,}9 \cdot 0{,}036\,43 = +3{,}599\,P,$$
$$M_{44} = +209{,}0 \cdot 0{,}036\,43 = +7{,}610\,P.$$

Für die Werte x erhält man bei gleicher Laststellung:

$$x_{14} = P \cdot \frac{0{,}3296}{2 \cdot 27}\,(0{,}8957 + 0{,}4446) = 0{,}0077\,P; \quad x\lambda = 0{,}077\,P,$$

$$x_{24} = P \cdot \frac{0{,}4771}{2 \cdot 27}\,(0{,}6743 + 0{,}7385) = 0{,}0125\,P; \quad x\lambda = 0{,}125\,P,$$

$$x_{34} = P \cdot \frac{0{,}6907}{2 \cdot 27}\,(0{,}3616 + 0{,}9323) = 0{,}0165\,P; \quad x\lambda = 0{,}165\,P.$$

Unter der Last ist, da $\varphi = 0$:

$$x_{44} = \frac{P}{2s} = \frac{P}{54} \qquad 0{,}0185\,P; \quad x\lambda = 0{,}185\,P.$$

In Punkt 4 wird also $P^w = P\,(1 - 0{,}185) = 0{,}815\,P$. Auf Seite 50 stehen die genauen Zahlen, die von den vorstehenden nicht allzusehr abweichen.

---

[1]) Vgl. u. a. Müller-Breslau, Statik der Baukonstr. II. 2, Seite 240.

Digitized by Google

Aus x folgt die Durchbiegung jedes Rahmens durch

$$y = \frac{x}{E_0} = \frac{x h^3 \lambda v}{6 E J'}.$$

Rahmen 4 erleidet hiernach die Durchbiegung

$$\delta = 0{,}185 \frac{P h^3 v}{6 E J'};$$

vgl. auch Gl. (72); der genauere Wert auf Seite 51 war

$$\delta = 0{,}201 \frac{P h^3 v}{6 E J'}.$$

Nach Gl. (70) erhielt man bei starren Endstützen für die Durchbiegung in der Mitte:

$$\delta = + \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma - \sin\gamma}{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma} \cdot \frac{P}{2 E_0 s}.$$

Bei elastischen Endstützen ist[1]):

$$\delta = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma + \cos\gamma + 2}{\mathfrak{Sin}\,\gamma + \sin\gamma} \cdot \frac{P}{2 E_0 s}. \tag{85}$$

Um den Wert von γ zu finden, für den in beiden Fällen die Durchbiegungen in der Mitte einander ungefähr gleich werden, streiche man $e^{-\gamma}$, setze also

$$\mathfrak{Sin}\,\gamma = \mathfrak{Cof}\,\gamma = \frac{1}{2} e^{\gamma},$$

worauf man durch Gleichsetzen von (70) und (85) die Gleichung erhält:

$$e^{\gamma}(1 + \cos\gamma) + 1 + 2\cos\gamma = 0. \tag{86}$$

Die Wurzel dieser Gleichung ist $\gamma \sim 2{,}8$, oder $\frac{2l}{s} = 2{,}8$. Hiernach hat also bei einer Länge der Halle von

$$2l = 27 \cdot 2{,}8 = 76 \text{ m}$$

die Art der Stützung an den Enden auf die Bewegungen des Rahmens in der Mitte unter den an ihm angreifenden Lasten keinen wesentlichen Einfluß.

[1]) Vgl. Fußnote Seite 57.

JAN 14 1917

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06721 1063

Digitized by Google

DER EISENBAU

CONSTRUCTIONS EN FER · STEEL CONSTRUCTIONS

INTERNATIONALE MONATSCHRIFT FÜR
THEORIE UND PRAXIS DES EISENBAUES

Schriftleitung: Ingenieur F. BLEICH, Wien VII, Stiftgasse 27

Schriftleitungsausschuß:

F. BLEICH
Ingenieur in Wien

J. E. BRIK
k. k. Hofrat, ord. Professor a. d. Techn. Hochschule in Wien

H. FISCHMANN
Oberingenieur, Dipl.-Ing. in Düsseldorf

M. FOERSTER
Geh. Hofrat, ord. Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden

G. CH. MEHRTENS
Geh. Hofrat, Prof. em. a. d. Techn. Hochschule in Dresden

Preis Mark 24.— für den Jahrgang. Einzelhefte Mark 2.50

Vorzügliches Insertionsorgan!

DER EISENBAU hat sich in der kurzen Zeit seines Bestehens in allen dem Eisenbauwesen nahestehenden Fachkreisen zahlreiche Freunde erworben. Die vielen Originalabhandlungen aus allen dem Eisenkonstrukteur wichtigen Fachgebieten machen den **EISENBAU** zu einem unentbehrlichen Nachschlagewerk, und somit zu einem Organ von bleibendem Wert. Die vornehme Ausstattung, vor allem aber die große Sorgfalt, die auf die Herstellung der zahlreichen Abbildungen verwendet wird, haben nicht minder mit beigetragen, dem **EISENBAU** in den wenigen Jahren seines Erscheinens seinen begründeten Ruf zu sichern.

Vorzügliches Insertionsorgan!

DER EISENBAU bringt Originalabhandlungen aus nachstehenden Gebieten: **Eisenbrückenbau, Eisenhochbau, Gerüstbau für moderne Förderanlagen, Theorie der eisernen Tragwerke, Technologie des Eisens, Werkstattstechnik, Montierungswesen, Eisenarchitektur, der Eisenbau in seiner Stellung zu anderen Bauweisen insbesondere zum Eisenbetonbau** usw.

In regelmäßiger Folge erscheint eine **Literaturschau** mit ausführlichen Inhaltsangaben, eine **technische** und **wirtschaftliche** Rundschau, die u. a. Auszüge aus bemerkenswerten Originalaufsätzen der in- und ausländischen Fachblätter bringt, Nachrichten über Bauausschreibungen und Wettbewerbe enthält, usw. Sorgfältige **Bücherbesprechungen** unterrichten den Leser über bemerkenswerte Neuerscheinungen auf dem Büchermarkt.

DER EISENBAU wurde lt. Schreiben vom 11. Juli 1911 vom Preuß. Ministerium der öffentlichen Arbeiten durch Runderlaß empfohlen.

Probehefte unentgeltlich und postfrei durch Wilhelm Engelmann, Verlagsbuchhandlung, Leipzig, Mittelstraße 2.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google